

Bab 6. Fungsi Transenden

6.9 Fungsi hiperbolik dan inversinya

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Kombinasi fungsi eksponensial alami e^x dan e^{-x} menghasilkan fungsi hiperbolik.

Definisi 1 (Fungsi hiperbolik)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (1)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (3)$$

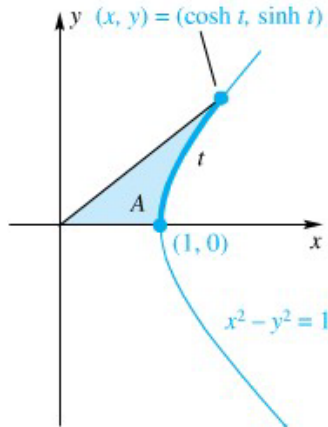
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (4)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad (5)$$

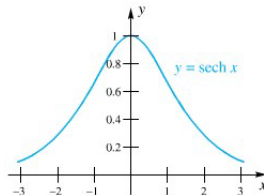
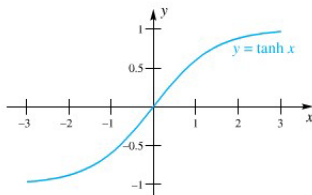
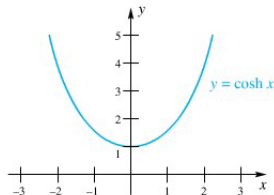
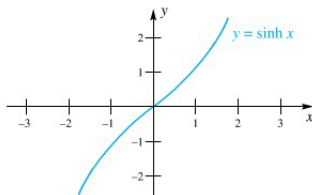
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \quad (6)$$

Identitas hiperbolik:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (7)$$



Titik-titik yang memenuhi identitas hiperbolik di atas membentuk kurva hiperbola. Hal ini mendasari penamaan fungsi hiperbolik.



Fungsi $\sinh$ dan $\tanh$: fungsi ganjil.

Fungsi $\cosh$ dan sech : fungsi genap, nilai fungsinya selalu positif.

Teorema 2 (Turunan fungsi hiperbolik)

$$D_x \sinh x = \cosh x \quad (8)$$

$$D_x \cosh x = \sinh x \quad (9)$$

$$D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x \quad (10)$$

$$D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x \quad (11)$$

$$D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \quad (12)$$

$$D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x \quad (13)$$

Contoh 3

Tentukanlah $D_x \tanh(\cos x)$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Teorema Turunan Fungsi Hiperbolik, didapat

$$\begin{aligned} D_x \tanh(\cos x) &= \operatorname{sech}^2(\cos x) \cdot D_x \cos x \\ &= -\sin x \cdot \operatorname{sech}^2(\cos x). \end{aligned}$$

Contoh 4

Tentukanlah $\int \tanh x \, dx$.

Perhatikan

$$\begin{aligned}\int \tanh x \, dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x} \, dx \\&= \int \frac{1}{\cosh x} d(\cosh x) \\&= \ln |\cosh x| + C \\&= \ln(\cosh x) + C.\end{aligned}$$

Gambar grafik fungsi $f(x) = \sinh(x)$ dan tentukanlah $f'(x)$.

Dengan GeoGebra:

$f(x) = \sinh(x)$

Derivative($\sinh(x)$)

Dengan Wolfram Mathematica:

`Plot[Sinh[x], {x,-3, 3}]`

`D[Sinh[x],x]`

Catatan

Huruf besar dan huruf kecil **dibedakan** di Wolfram Mathematica.

Latihan Mandiri.

- 1 Buktikanlah $D_x \sinh x = \cosh x$.
- 2 Tentukanlah $D_x \sinh(x^2)$.
- 3 Tentukanlah $D_x \sinh^2 x$.
- 4 Tentukanlah $\int e^x \sinh e^x dx$.

Fungsi hiperbolik dan fungsi inversinya memenuhi hubungan berikut.

$$x = \sinh^{-1} y \Leftrightarrow y = \sinh x,$$

$$x = \cosh^{-1} y \Leftrightarrow y = \cosh x, x \geq 0$$

$$x = \tanh^{-1} y \Leftrightarrow y = \tanh x,$$

$$x = \operatorname{sech}^{-1} y \Leftrightarrow y = \operatorname{sech} x, x \geq 0.$$

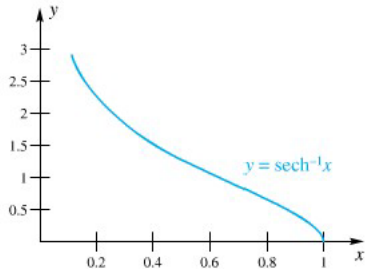
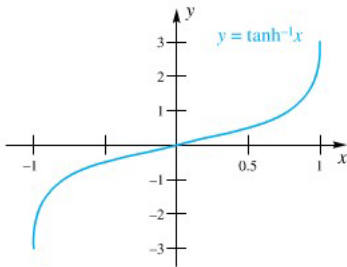
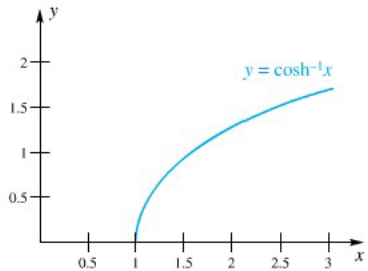
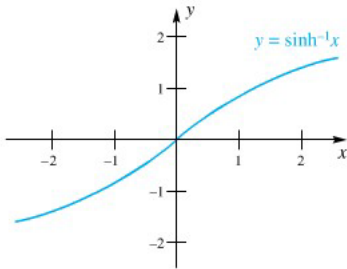
Teorema 5 (Fungsi hiperbolik inversi)

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (14)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1 \quad (15)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1 \quad (16)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad 0 < x \leq 1 \quad (17)$$



Teorema 6 (Turunan fungsi hiperbolik inversi)

$$D_x \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (18)$$

$$D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \geq 1 \quad (19)$$

$$D_x \tanh^{-1} x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1 \quad (20)$$

$$D_x \operatorname{sech}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x \leq 1 \quad (21)$$

Contoh 7

Tentukanlah $D_x \cosh^{-1}(x^2 + 1)$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Teorema Turunan Fungsi Hiperbola Inversi,

$$\begin{aligned} D_x \cosh^{-1}(x^2 + 1) &= \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}} \cdot D_x(x^2 + 1) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

1. Buktikanlah $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
2. Buktikanlah $D_x \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, dengan $x > 1$.
3. Tentukanlah $D_x \ln(\cosh^{-1} x)$.
4. Tentukanlah $\int \cos x \sinh(\sin x) dx$.
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva $y = \cosh 2x$, sumbu x , garis vertikal $x = -\ln 5$ dan $x = \ln 5$.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI