UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

EST. 1849

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Departemen Matematika

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Induksi Matematika

Mata Kuliah : Logika dan Teori Bilangan

Departemen Matematika, Universitas Indonesia

Dosen: Dr. Kiki Ariyanti Sugeng

Sub Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
EST. 1849

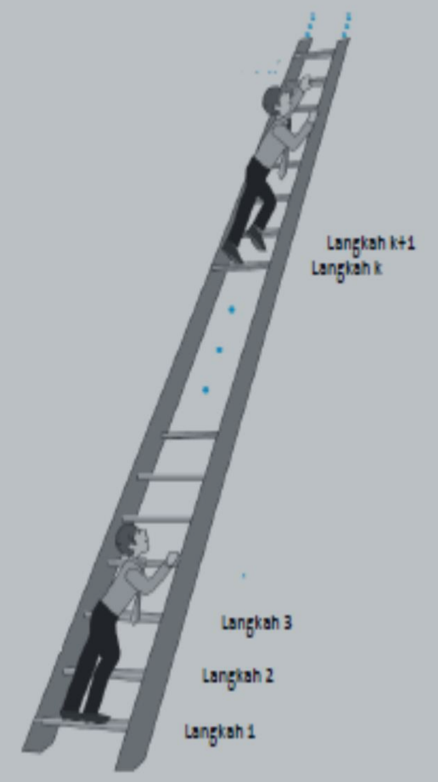
- Mampu menjelaskan teknik-teknik pembuktikan (C2)
- Mampu menggunakan logika proposisi dan logika predikat pada pembuktian matematika sederhana (C3)
- Mampu menggunakan teknik pembuktian untuk menyelesaikan masalah matematika sederhana (C3)

Induksi Matematika

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
Est. 1849

Ilustrasi

- Untuk menaiki tangga ini, kita bisa mencapai anak tangga pertama.
- Setelah mencapai anak tangga pertama, maka kita juga bisa mencapai anak tangga kedua.
- Jika kita bisa mencapai anak tangga tertentu (misal anak tangga ke $-k$) maka kita bisa mencapai anak tangga selanjutnya (anak tangga ke-($k+1$)).



Menaiki anak tangga
(Rosen, hal 312)

Contoh 1: Tunjukkan jika n bilangan bulat positif, maka

$$1 + 2 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bukti:

Langkah dasar: P(1) benar, karena $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

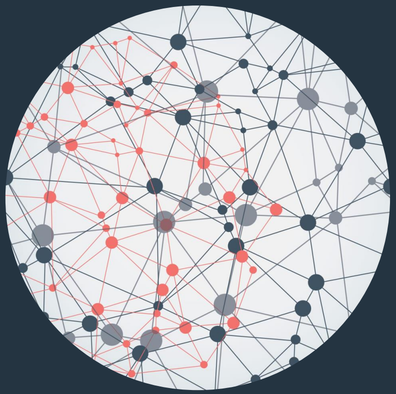
Langkah Induktif:

Asumsikan P(k) berlaku untuk sembarang bilangan posiitf k.

Jadi $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Harus dibuktikan P(k+1) benar

$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$



Induksi Matematika

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
EST. 1849

Konsep

Induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan bahwa **proposisi $P(n)$ benar untuk seluruh bilangan bulat positif n.**

Prinsip

Prinsip pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari 2 langkah:

- **Langkah dasar/awal**
- **Langkah induktif**

Langkah-langkah

Langkah dasar/awal : Buktikan bahwa $P(1)$ benar, dan
Langkah induktif: Buktikan pernyataan bersyarat

$P(k) \to P(k+1)$ benar untuk semua bilangan positif k. (dibuktikan untuk semua bilangan bulat k, jika $P(k)$ benar maka $P(k+1)$ benar)

$$(P(1) \land \forall k(P(k) \to P(k+1))) \to \forall n P(n),$$

Soal Diskusi

Gunakan Langkah Berikut:

- Tentukan pernyataan P(1)
- Tunjukkan bahwa P(1) benar
- Tuliskan hipotesa induksi
- Tuliskan apa yang diperlukan untuk dibuktikan pada langkah induktif.
- Lengkapi langkah induktif dan jelaskan kapan menggunakan hipotesa induktif.
- Jelaskan mengapa langkah ini benar jika n adalah bilangan bulat positif.

Soal Diskusi

- Gunakan induksi matematika untuk menunjukkan bahwa untuk semua bilangan bulat positif n berlaku:

1. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$
2. $n < 2^n.$
3. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1.1! + 2.2! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$

Mari Berlatih Soal No 1.

- $P(n)$: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$
- **Langkah awal** (menunjukkan sifat berlaku untuk $n = 1$ atau $P(1)$ benar):
- Misalkan $n = 1$, maka
- $1 + 2 = 3$ dan $2^{1+1} - 1 = 3.$
- Jadi $1 + 2 = 2^{1+1} - 1$ benar.

Mari Berlatih Soal No 1. (lanj)

- $P(n)$: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$
- **Langkah Induktif:**
- Hipotesa Induksi (Diandaikan $P(k)$ berlaku) :
- $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ benar untuk sembarang bilangan k positif.
- **Akan dibuktikan $P(k+1)$ berlaku**: Misalkan $n = k + 1$
- $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} =$ $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} = 2.\ 2^{k+1} - 1 =$ $2^{(k+1)+1} - 1$
- Jadi $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ terbukti untuk semua n bilangan asli .

Mari Berlatih Soal No 2

- Tunjukkan $P(n): n < 2^n$.
- **Langkah awal** (menunjukkan sifat berlaku untuk $n = 1$ atau $P(1)$ benar):
- Misalkan $n = 1$, maka $1 < 2^1$ benar.

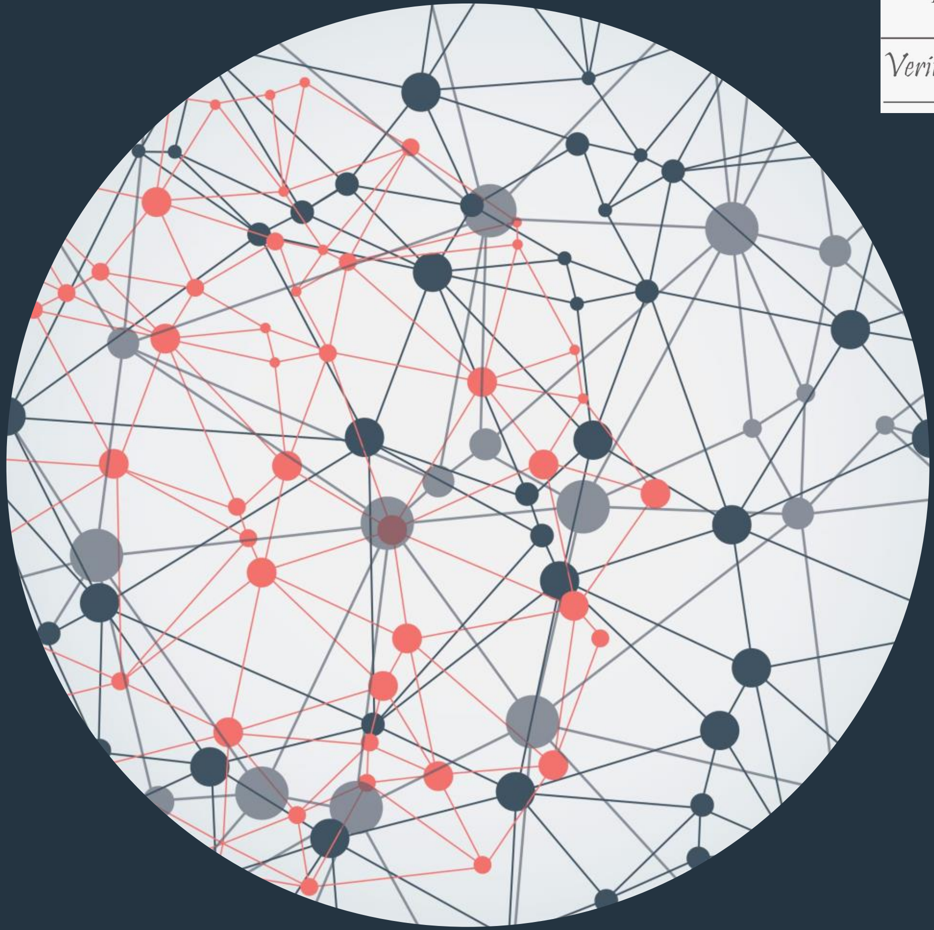
Mari Berlatih Soal No 2 (lanj.)

- $P(n): n < 2^n$.
- **Langkah Induktif:**
- Hipotesa Induksi (Diandaikan $P(k)$ berlaku) :
- $k < 2^k$ benar untuk sembarang bilangan k positif.
- **Akan dibuktikan $P(k+1)$ berlaku**:
- Misalkan $n = k + 1$
- $k + 1 < 2^k + 1$ (dari hipotesa induksi)
- $k + 1 < 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$
- Jadi $n < 2^n$ terbukti untuk semua n bilangan asli .

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
Est. 1849

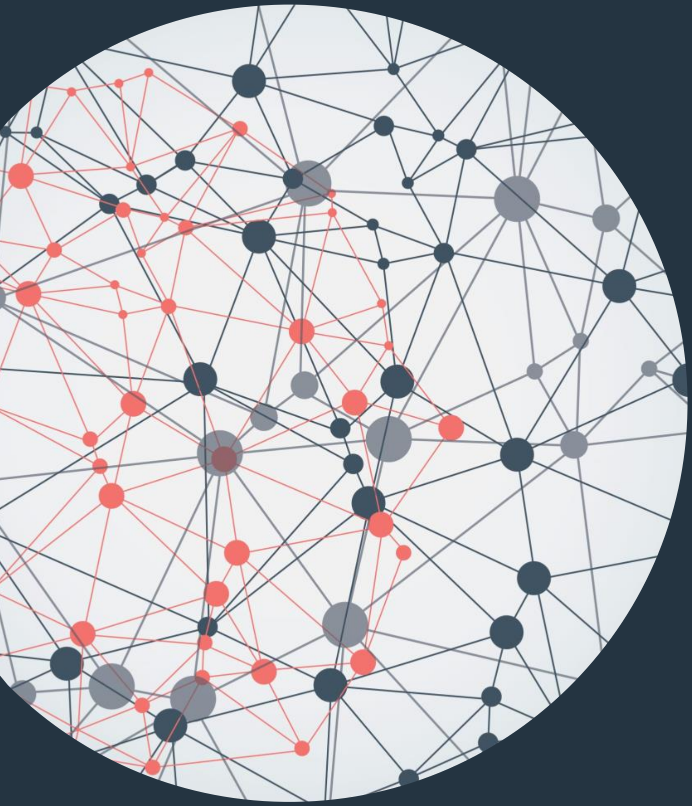
Soal diskusi:

Lanjutkan untuk Nomer Berikutnya



Daftar Pustaka

- **K.H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Application, 7th ed, Mac Graw Hill, 2012**



TERIMA KASIH

Video Bantuan Dana Bantuan Mata Kuliah MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi S1 Matematika, FMIPA Universitas Indonesia