UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

EST. 1849

BUKTI KONTRADIKSI

DEPARTEMEN MATEMATIKA FMIPA UI

BELAWATI WIJAYA

Rev. Kiki A.S

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

- **Setelah mempelajari topik ini, Anda akan mampu menguji kebenaran pernyataan dalam masalah matematika sederhana menggunakan teknik pembuktian langsung, tidak langsung dan induksi matematika (C4)**

3

Metode Membuktikan sebuah Teorema

Vacuous proof

Trivial proof

Direct proof

Indirect proof atau proof by contraposition

Proof by contradiction

Proof by cases.

4

(v) *Proof by contradiction*

- Misalkan ingin dibuktikan bahwa sebuah proposisi p bernilai *true*.
- Dan misalkan lagi bisa dibuktikan bahwa $\neg p \rightarrow q$ adalah *true*, dengan q merupakan sebuah proposisi yang merupakan sebuah *contradictory* (selalu bernilai *false*). Atau

- Bila bisa dibuktikan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ *true*, dan $r \wedge \neg r$ adalah sebuah *contradictory* (selalu bernilai *false*), maka dapat disimpulkan bahwa adalah $\neg p$ *false*.
- Dengan perkataan lain, p bernilai *true*.
- Cara pembuktian ini disebut ***proof by contradiction***.

Contoh 8.

Buktikan: Di antara 22 tanggal, pasti paling sedikit 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama.

Bukti:

Ambil

p := Di antara 22 tanggal, pasti paling sedikit 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama

r := Ada 22 tanggal

maka

$\neg p$:= Di antara 22 tanggal, tidak ada 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama, Misalkan $\neg p$ *true*.

Berarti, ***r true*,** dan

paling banyak 3 tanggal yang jatuh pada hari yang sama.

Sedangkan jumlah hari ada 7.

Jadi, paling banyak ada 7 x 3 tanggal, yaitu ada 21 tanggal.

Dengan perkataan lain $\neg$***r true*.**

Jadi, terbukti bahwa $\neg \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \neg \boldsymbol{r})$ ***true*,**

maka $\neg$***p*** *false*,

jadi p *true*.

Contoh 9.

Berikan suatu ***proof by contradiction*** untuk teorema berikut:
Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Bukti.

Ambil

$p :=$ Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil

$r :=$ $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil

maka

$\neg p :=$ $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil dan n bukan bilangan ganjil

Misalkan $\neg p$ *true*.

Berarti, ***r true,*** dan n adalah sebuah bilangan genap.

Dengan perkataan lain,

$$n = 2k, \text{ jadi } 3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1).$$

Yang berarti $3n + 2$ adalah sebuah bilangan genap,

jadi $\boldsymbol{\neg r}$ ***true*****.**

Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)}$ ***true*****.**

Maka $\boldsymbol{\neg p}$ *false*,

atau p *true*,

atau

Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Contoh 10.

Buktikan: $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional (bukan bilangan rasional).

- Ambil $p := \sqrt{2}$ adalah bilangan irasional
- Maka $\neg p := \sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.
- Misalkan $\neg p$ *true*.
- Berarti $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat yang tidak memiliki factor yang sama dan b tidak nol
- Dari $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$, atau $2b^2 = a^2$.
- Karena $a^2 = 2b^2$, berarti a^2 adalah sebuah bilangan genap. Dari Contoh 3, telah dibuktikan:
- Jika n adalah bilangan ganjil, maka n^2 adalah bilangan ganjil pula.

Maka *contrapositive*-nya:

Jika n^2 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap pula.

Jadi, dari a^2 adalah sebuah bilangan genap, maka ***a* juga sebuah bilangan genap**.

Maka, $a = 2k$.

Yang mengakibatkan $2b^2 = (2k)^2$, atau $b^2 = 2k^2$.

Karena $b^2 = 2k^2$, berarti b^2 adalah sebuah bilangan genap.

Dengan alasan seperti tadi, maka dapat disimpulkan ***b* juga sebuah bilangan genap**.

Dari ***a* juga sebuah bilangan genap** dan ***b* juga sebuah bilangan genap,** maka dapat disimpulkan bahwa $\neg r :=$ a dan b merupakan bilangan bulat yang memiliki factor yang sama, yaitu 2.

Jadi, telah terbukti bahwa $\boldsymbol{\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)}$ ***true*.**

Maka p *true*, atau $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Suatu bilangan bulat n disebut ***perfect power*** bila terdapat dua bilangan bulat m dan $k > 1$, sehingga $n = m^k$.

11

- **Contoh 11.**
- Buktikan:
- Dua bilangan bulat yang berturutan, n dan $(n + 1)$ dengan
- $1 \leq n, n + 1 \leq 100$ yang merupakan ***perfect power*** adalah 8 dan 9, dan tidak ada lainnya.
- Bukti:
- Untuk membuktikan ini dapat dimisalkan $n = m^k$ dengan $m = 1, 2, 3,$
- $\ldots, M$ dan $k = 2, 3, 4, \ldots, K$ dan sehingga $1 \leq n \leq 100$.

$n = m^k$	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10	m=11
$k = 2$	1	4	**9**	16	25	36	49	64	81	100	>100
$k = 3$	1	**8**	27	64	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 4$	1	16	81	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 5$	1	32	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 6$	1	64	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 7$	1	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100

Dari tabel di atas dicari 2 bilangan bulat yang berturutan, n dan $(n+1)$ dengan $1 \le n$, $n+1 \le 100$ yang merupakan ***perfect power***. Dan terlihat bahwa bilangan bulat tersebut adalah 8 dan 9, dan tidak ada lainnya.

Tabel tersebut dapat dibuat bila yang diamati tidak terlalu banyak
(di sini $1 \le n$, $n + 1 \le 100$). Bila masalah yang sama harus dikerjakan untuk $1 \le n$, $n + 1 \le 10000$, adalah hal yang tidak mungkin.

13

(vi) *Proof by cases.*

- Perhatikan bahwa kalimat $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots\ldots \vee p_n) \rightarrow q$
- setara dengan kalimat

$$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots\ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

- Jadi untuk membuktikan kalimat pertama,dapat dibuktikan setiap kalimat
  - $p_i \rightarrow q$ untuk $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$.
- Cara pembuktian ini disebut ***proof by cases***.

Contoh 12.

Buktikan: $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Bukti:

Ambil $p :=$ n adalah sebuah bilangan bulat,

dan $q := n^2 \geq n$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ dengan

$p_1 := n$ adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$

$p_2 := n = 0$

dan $p_3 := n$ adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau

Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 0$ maka $n^2 \geq n$. Ternyata benar.

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

Maka $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$ terbukti.

Contoh 13.

Buktikan:

Jika n adalah sebuah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3, maka $n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Bukti.

Ambil

$$p := n \text{ adalah sebuah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3,}$$

dan $\quad q := n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2$ dengan

$$p_1 := n \equiv 1 \pmod 3,$$

dan $\quad p_2 := n \equiv 2 \pmod 3$,

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

(i) $p_1 \to q$ atau Jika $n \equiv 1 \pmod 3$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod 3$, dan

(ii) $p_2 \to q$ atau Jika $n \equiv 2 \pmod 3$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Untuk (i):

$n \equiv 1 \pmod 3$, berarti $n = 3k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k.

Maka $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$,

jadi $n^2 \equiv 1 \pmod 3$

berarti (i) atau $p_1 \to q$ terbukti.

Untuk (ii):

$n \equiv 2 \pmod 3$, berarti $n = 3k + 2$, untuk suatu bilangan bulat k.

Maka $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$,

jadi $n^2 \equiv 1 \pmod 3$.

berarti (ii) atau $p_2 \to q$ terbukti.

Jadi $(p_1 \vee p_2) \to q$ terbukti.

Contoh 14.

Buktikan: Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \le 4$, maka $(n + 1)^3 \ge 3^n$.

Bukti:

n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \le 4$,

berarti $n = 1$ atau $n = 2$ atau $n = 3$ atau $n = 4$.

Ambil $p_1 := n = 1$, $p_2 := n = 2$, $p_3 := n = 3$, $p_4 := n = 4$,

dan $q := (n + 1)^3 \ge 3^n$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \to q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau Jika $n = 1$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 2$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika $n = 3$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$, dan

(iv)$p_4 \rightarrow q$ atau Jika $n = 4$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

Untuk (i):

Untuk $n = 1$, $(n + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 8 \geq 3$. Berarti $p_1 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (ii):

Untuk n = 2, $(n + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 27 \geq 3^2$. Berarti $p_2 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iii):

Untuk $n = 3$, $(n + 1)^3 = (3 + 1)^3 = 64 \geq 3^3$. Berarti $p_3 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iv):

Untuk $n = 4$, $(n + 1)^2 = (4 + 1)^3 = 125 \geq 3^4$. Berarti $p_4 \rightarrow q$ terbukti.

Jadi terbukti $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \rightarrow q$.

Contoh 15.

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

$|xy| = |x||y|$.

Bukti:

Berdasarkan definisi harga mutlak: $|x| = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{untuk} \quad x \leq 0 \end{cases}$,

maka pembuktiannya dibagi menjadi 4 kasus:

Kasus 1: Untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Karena $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \geq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = x$ dan $|y| = y$.

Karena $xy \geq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak, $|xy| = xy$,

sedangkan $|x||y| = xy$,

jadi, $|xy| = |x||y|$.

Kasus 2: Untuk $x \geq 0$ dan $y \leq 0$.

Karena $x \geq 0$ dan $y \leq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \leq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = x$, dan $|y| = -y$.

Karena $xy \leq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak $|xy| = -xy$,

sedangkan $|x||y| = -xy$,

jadi, $|xy| = |x||y|$.

Kasus 3: Untuk $x \leq 0$ dan $y \geq 0$.

Buktinya serupa dengan kasus 2.

Kasus 4: Untuk $x \leq 0$ dan $y \leq 0$.

Karena $x \leq 0$ dan $y \leq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \geq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = -x$, dan $|y| = -y$.

Karena $xy \geq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak, $|xy| = xy$,

sedangkan $|x||y| = (-x)(-y) = xy$.

jadi, $|xy| = |x||y|$.

Contoh 16.

Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Bukti:

Sebetulnya untuk membuktikannya, harus diperiksa apakah setiap pasangan bilangan bulat x dan y tidak bisa memenuhi persamaan tersebut, hal ini tidak dimungkinkan, maka ditinjau hal berikut:

Karena $x^2 \geq 0$ dan $3y^2 \geq 0$, dan
persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$ harus terpenuhi, maka haruslah
$3y^2 \leq 8$ dan $x^2 \leq 8$.

Jadi nilai y yang mungkin adalah 0, –1, atau 1.
Dpl, $3y^2 = 0$ atau $3y^2 = 3$.

Dan nilai x yang mungkin adalah 0, –1, 1, –2, atau 2.
Dpl, $x^2 = 0$, $x^2 = 1$ atau $x^2 = 4$.

Sekarang tinggal diperiksa apakah kasus-kasus berikut bisa memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Kasus 1: $x^2 = 0$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 0$,
jadi kasus 1 tidak bisa memenuhi.

Kasus 2: $x^2 = 1$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 1$,
jadi kasus 2 tidak bisa memenuhi.

Kasus 3: $x^2 = 4$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 4$,
jadi kasus 3 tidak bisa memenuhi.

Kasus 4: $x^2 = 0$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 0$,
jadi kasus 4 tidak bisa memenuhi.

Kasus 5: $x^2 = 1$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 4$,
jadi kasus 5 tidak bisa memenuhi.

Kasus 6: $x^2 = 4$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 7$,
jadi kasus 6 tidak bisa memenuhi.

Jadi terbukti bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Fallacies

- Perhatikan bahwa kalimat

  $$((p \to q) \land q) \to p$$

  tidak valid, karena kalimat tersebut bernilai *false* terhadap interpretasi

  I: $p(F)$ dan $q(T)$.

  Maka kalimat tersebut tidak dapat dijadikan suatu aturan. Jika dijadikan suatu aturan maka akan menimbulkan kesalahan, kesalahan ini disebut ***fallacy of affirming the conclusion***, hal ini dapat dilihat pula pada contoh berikut:

Contoh 17.

(1) Diketahui bahwa

"Jika hari hujan maka kita tidak jadi berlayar", dan

"Kita tidak jadi berlayar".

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa

"Hari hujan".

(2) Diketahui bahwa

"Jika anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini, maka anda pandai matematika diskret", dan

"Anda pandai matematika diskret".

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa

"Anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini".

- Perhatikan bahwa kalimat

  $$((p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

  tidak valid, karena kalimat tersebut bernilai *false* terhadap interpretasi
  I: $p(F)$ dan $q(T)$.

  Maka kalimat tersebut tidak dapat dijadikan suatu aturan. Jika dijadikan suatu aturan maka akan menimbulkan kesalahan, kesalahan ini disebut ***fallacy of denying the hypothesis,*** hal ini dapat dilihat pula pada contoh berikut:

Contoh 18.

(1) Diketahui bahwa “Jika hari hujan maka kita tidak jadi berlayar”, dan
“Hari tidak hujan”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Kita jadi berlayar”.

(2) “Jika anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini, maka anda pandai matematika diskret”, dan
“Anda tidak membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Anda tidak pandai matematika diskret”.

Circular reasoning

Circular reasoning adalah sebuah pembuktian yang didalamnya memakai fakta yang ingin dibuktikan.

- **Contoh 19.**
- Tunjukkan bahwa jika n^2 adalah sebuah bilangan genap, maka n adalah sebuah bilangan genap pula.
- Misalkan buktinya adalah sebagai berikut:
- Karena n^2 adalah sebuah bilangan genap, maka $n^2 = 2k$ dengan k sebuah bilangan bulat
- $n = 2h$ untuk sebuah bilangan bulat h.
- Jadi n adalah sebuah bilangan genap

- Bukti tersebut tidak benar, karena telah memakai alas an ‘*n=2h*’ untuk sebuah bilangan bulat h’, untuk menyimpulkan bahwa ‘n adalah sebuat bilangan genap’
- Sebetulnya ‘n = 2h untuk sebuah bilangan bulat h’ adalah benar jika ‘n adalah sebuah bilangan genap’ adalah benar, sedangkan ‘*n* adalah sebuah bilangan genap’ adalah yang mau dibuktikan kebenarannya.

- Kesalahan dalam pembuktian ini disebut *fallacy of circular reasoning*.