



METODE PEMBUKTIAN

BELAWATI WIJAYA

Rev. Kiki A.S

Matematika UI 2019

Suatu **Teorema** atau **Proposisi** adalah suatu pernyataan yang dapat ditunjukkan bahwa nilai kebenarannya (*truth value*) selalu benar (*absah, valid*). Proses menunjukkannya disebut suatu pembuktian.

Suatu **aksioma** atau suatu **postulat** adalah suatu pernyataan yang keabsahannya tidak perlu dibuktikan.

Metode Pembuktian

Suatu pembuktian adalah suatu barisan pernyataan yang absah, setiap pernyataannya dapat berupa suatu **aksioma** atau suatu **postulat** atau teorema lain yang keabsahannya sudah dibuktikan, atau hipotesa dari teorema yang bersangkutan atau dapat diturunkan dari salah satu atau beberapa pernyataan sebelumnya berdasarkan aturan-aturan tertentu.

Aturan-aturan ini disebut ***rules of inference.***

Suatu **lemma** adalah suatu teorema yang sederhana dan dipakai dalam pembukti-an teorema lain yang lebih kompleks.

Suatu **corollary** juga merupakan suatu teorema yang merupakan akibat langsung dari suatu teorema yang sudah dibuktikan.

5

Metode Membuktikan sebuah Teorema

Vacuous proof

Trivial proof

Direct proof

*Indirect proof atau proof by
contraposition*

Proof by contradiction

Proof by cases.

6

(i) *Vacuous proof*

- Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila p bernilai *false*.
- Jadi untuk membuktikan bahwa kalimat tersebut bernilai *true*, salah satu cara adalah membuktikan bahwa p bernilai *false*. Pembuktian cara ini disebut *vacuous proof*.

Contoh 1

► $P(n) := \text{Jika } n > 1 \text{ maka } n^2 > n$

► Buktikan: $P(0) := \text{Jika } 0 > 1 \text{ maka } 0^2 > 0$ bernilai *true*.

Bukti:

► Nyatakan $P(0)$ sebagai $p \rightarrow q$ dengan $p := 0 > 1$ dan $q := 0^2 > 0$.

► Untuk membuktikan $p \rightarrow q$ cukup dibuktikan bahwa p bernilai *false*.

► Sedangkan $p := 0 > 1$ yang memang bernilai *false*.

► Jadi, $P(0)$ *true* berdasarkan *vacuous proof*.

(ii) *Trivial proof*

- Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila q bernilai *true*.
- Jadi untuk membuktikan bahwa kalimat tersebut bernilai *true*, salah satu cara adalah membuktikan bahwa q bernilai *true*.
- Pembuktian cara ini disebut *trivial proof*.

Contoh 2.

$P(n) :=$ Jika a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$,
maka $a^n \geq b^n$.

Buktikan:

$P(0) :=$ Jika a dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$,
maka $a^0 \geq b^0$ bernilai *true*.

Bukti:

Nyatakan $P(0)$ sebagai $p \rightarrow q$ dengan $p := a$ dan b adalah bilangan bulat positif dengan $a \geq b$ dan $q := a^0 \geq b^0$.

Untuk membuktikan $p \rightarrow q$ cukup dibuktikan bahwa q bernilai *true*.

Sedangkan $q := a^0 \geq b^0$ tidak lain adalah $1 \geq 1$ yang bernilai *true*.

Jadi, $P(0)$ *true* berdasarkan ***trivial proof***.

(iii) *Direct proof*

- Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ bernilai *true* apabila jika p bernilai *true*, maka q harus bernilai *true*.
- Dengan perkataan lain harus ditunjukkan bahwa keadaan p bernilai *true* dan q bernilai *false* tidak pernah terjadi. Pembuktian ini disebut *direct proof*.

Contoh 3.

Berikan suatu *direct proof* untuk teorema berikut:

Jika n adalah sebuah bilangan ganjil, maka n^2 juga bilangan ganjil.

Bukti.

Teorema di atas dapat dinyatakan dalam kalimat logika predikat:

$\forall n (p(n) \rightarrow q(n))$ dengan

$p(n) := n$ adalah sebuah bilangan ganjil, dan

$q(n) := n^2$ adalah sebuah bilangan ganjil

Jadi yang mau dibuktikan adalah $\forall n (p(n) \rightarrow q(n))$ *valid*.

Misalkan bahwa untuk sembarang n , $p(n)$ *true*, akan ditunjukkan bahwa $q(n)$ juga *true*.

$p(n)$ *true*, berarti n adalah sebuah bilangan ganjil,
jadi $n = 2k + 1$ dengan k sebuah bilangan bulat.

Jadi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

maka n^2 juga bilangan ganjil, jadi $q(n)$ *true*.

Dengan perkataan lain $\forall n (p(n) \rightarrow q(n))$ *valid*.

Suatu bilangan bulat n disebut sebuah *perfect square* bila terdapat sebuah bilangan bulat k sehingga $n = k^2$.

Contoh 4.

Berikan suatu *direct proof* untuk teorema berikut:

Jika m dan n adalah sebuah *perfect square*, maka hasilkalinya mn juga sebuah *perfect square*.

Bukti:

Teorema ini dapat dinyatakan dalam kalimat logika predikat:

$$\forall m \forall n (p(m) \wedge p(n) \rightarrow p(mn))$$

dengan $p(n) := n$ adalah sebuah *perfect square*

Jadi yang mau dibuktikan adalah $\forall m \forall n (p(m) \wedge p(n) \rightarrow p(mn))$ *valid*.

Dengan perkataan lain harus ditunjukkan bahwa untuk sembarang m dan n , bila $p(m) \wedge p(n)$ bernilai *true*, $p(mn)$ juga bernilai *true*.

Dari $p(m) \wedge p(n)$ bernilai *true*, diperoleh

m adalah *perfect square*, berarti ada bilangan bulat h sehingga $m = h^2$.

n adalah *perfect square*, berarti ada bilangan bulat k sehingga $n = k^2$.

maka

$$mn = (h^2)(k^2).$$

Berdasarkan sifat perkalian bilangan bulat hasilkali diperoleh

$$mn = (h^2)(k^2) = (hk)^2.$$

Yang berarti mn adalah sebuah *perfect square*. Jadi $p(mn)$ bernilai *true*.

Contoh 5.

Buktikan: Jumlah dua bilangan rasional adalah bilangan rasional pula.

Bukti:

Teorema di atas dapat dinyatakan dalam kalimat logika predikat:

$$\forall x \forall y (r(x) \wedge r(y) \rightarrow r(x + y))$$

dengan $r(x) := x$ adalah bilangan rasional

Jadi yang mau dibuktikan adalah $\forall x \forall y (r(x) \wedge r(y) \rightarrow r(x + y))$ *valid*.

Dengan perkataan lain harus ditunjukkan bahwa untuk sembarang x dan y , bila $r(x) \wedge r(y)$ bernilai *true*, $r(x + y)$ juga bernilai *true*.

Dari $r(x) \wedge r(y)$ bernilai *true*, diperoleh

$x = \frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat dan $b \neq 0$ dan

$y = \frac{c}{d}$ dengan c dan d merupakan bilangan bulat dan $d \neq 0$,

maka $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ dengan $bd \neq 0$.

Jadi, $x + y$ juga sebuah bilangan rasional.

Yang berarti $r(x + y)$ bernilai *true*.

(iv) *Indirect proof* atau *proof by contraposition*

► Perhatikan bahwa kalimat $p \rightarrow q$ setara dengan kalimat *contrapositive*-nya $\neg q \rightarrow \neg p$.

► Jadi untuk membuktikan kalimat pertama, dapat dibuktikan kalimat kedua. Cara pembuktian ini disebut *indirect proof* atau *proof by contraposition*.

Contoh 6.

Berikan suatu *indirect proof* atau *proof by contraposition* untuk teorema berikut:

Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Bukti.

Ambil

$p := 3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil

$q := n$ adalah sebuah bilangan ganjil

Yang ingin dibuktikan adalah $p \rightarrow q$

Dengan indirect proof harus membuktikan bahwa

$$\neg q \rightarrow \neg p.$$

Jika n bukan bilangan ganjil, maka $3n + 2$ juga bukan sebuah bilangan ganjil.

Misalkan bahwa ' n bukan bilangan ganjil',
dengan perkataan lain ' n adalah bilangan genap',
berarti $n = 2k$ untuk sebuah bilangan bulat k .

Jadi $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1)$

berarti $3n + 2$ adalah sebuah bilangan genap, atau

$3n + 2$ juga bukan sebuah bilangan ganjil.

Maka $\neg q \rightarrow \neg p$ telah terbukti.

Contoh 7.

Buktikan: Jika n adalah sebuah bilangan bulat dan n^2 adalah bilangan ganjil, maka n adalah sebuah bilangan ganjil pula.

Bukti:

Ambil $p := n^2$ adalah sebuah bilangan ganjil

$q := n$ adalah sebuah bilangan ganjil

Yang ingin dibuktikan adalah $p \rightarrow q$.

Bila dipakai *direct proof* akan sulit dibuktikan, maka akan dipakai *indirect proof*.

Dengan *indirect proof* harus membuktikan bahwa

$$\neg q \rightarrow \neg p,$$

dengan $\neg q := n$ bukan sebuah bilangan ganjil,
berarti n adalah sebuah bilangan genap.

$\neg p := n^2$ bukan sebuah bilangan ganjil, berarti
 n adalah sebuah bilangan genap.

Bila $\neg q$ *true*
berarti n adalah sebuah bilangan genap,
berarti ada bilangan bulat k sehingga $n = 2 k$.
Jadi, $n^2 = 4 k^2 = 2(2 k^2)$,
yang berarti n^2 adalah sebuah bilangan genap,
maka $\neg p$ juga *true*.

(v) *Proof by contradiction*

- Misalkan ingin dibuktikan bahwa sebuah proposisi p bernilai *true*.
- Dan misalkan lagi bisa dibuktikan bahwa $\neg p \rightarrow q$ adalah *true*, dengan q merupakan sebuah proposisi yang merupakan sebuah *contradictory* (selalu bernilai *false*). Atau
- Bila bisa dibuktikan bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ *true*, dan $r \wedge \neg r$ adalah sebuah *contradictory* (selalu bernilai *false*), maka dapat disimpulkan bahwa adalah $\neg p$ *false*.
- Dengan perkataan lain, p bernilai *true*.
- Cara pembuktian ini disebut *proof by contradiction*.

Contoh 8.

Buktikan: Di antara 22 tanggal, pasti paling sedikit 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama.

Bukti:

Ambil

$p :=$ Di antara 22 tanggal, pasti paling sedikit 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama

$r :=$ Ada 22 tanggal

maka

$\neg p :=$ Di antara 22 tanggal, tidak ada 4 tanggal yang jatuh pada hari yang sama,

Misalkan $\neg p$ *true*.

Berarti, r *true*, dan

paling banyak 3 tanggal yang jatuh pada hari yang sama.

Sedangkan jumlah hari ada 7.

Jadi, paling banyak ada 7×3 tanggal, yaitu ada 21 tanggal.

Dengan perkataan lain $\neg r$ *true*.

Jadi, terbukti bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ *true*,

maka $\neg p$ *false*,

jadi p *true*.

Contoh 9.

Berikan suatu *proof by contradiction* untuk teorema berikut:

Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Bukti.

Ambil

$p :=$ Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil

$r :=$ $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil

maka

$\neg p :=$ $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil dan n bukan bilangan ganjil

Misalkan $\neg p$ *true*.

Berarti, r *true*, dan n adalah sebuah bilangan genap.

Dengan perkataan lain,

$$n = 2k, \text{ jadi } 3n + 2 = 3(2k) + 2 = 2(3k + 1).$$

Yang berarti $3n + 2$ adalah sebuah bilangan genap,

jadi $\neg r$ *true*.

Jadi, terbukti bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ *true*.

Maka $\neg p$ *false*,

atau p *true*,

atau

Jika $3n + 2$ adalah sebuah bilangan ganjil, maka n juga bilangan ganjil.

Contoh 10.
Buktikan: $\sqrt{2}$
adalah
bilangan
irasional
(bukan
bilangan
rasional).

- Ambil $p := \sqrt{2}$ adalah bilangan irasional
- Maka $\neg p := \sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.
- Misalkan $\neg p$ *true*.
- Berarti $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat yang tidak memiliki factor yang sama dan b tidak nol
- Dari $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ diperoleh $2 = \frac{a^2}{b^2}$, atau $2b^2 = a^2$.
- Karena $a^2 = 2b^2$, berarti a^2 adalah sebuah bilangan genap. Dari Contoh 3, telah dibuktikan:
- Jika n adalah bilangan ganjil, maka n^2 adalah bilangan ganjil pula.

Maka *contrapositive*-nya:

Jika n^2 adalah bilangan genap, maka n adalah bilangan genap pula.

Jadi, dari a^2 adalah sebuah bilangan genap, maka **a juga sebuah bilangan genap.**

Maka, $a = 2k$.

Yang mengakibatkan $2b^2 = (2k)^2$, atau $b^2 = 2k^2$.

Karena $b^2 = 2k^2$, berarti b^2 adalah sebuah bilangan genap.

Dengan alasan seperti tadi, maka dapat disimpulkan **b juga sebuah bilangan genap.**

Dari **a juga sebuah bilangan genap** dan **b juga sebuah bilangan genap**, maka dapat disimpulkan bahwa $\neg r := a$ dan b merupakan bilangan bulat yang memiliki factor yang sama, yaitu 2.

Jadi, telah terbukti bahwa $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ *true*.

Maka p *true*, atau $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional.

Suatu bilangan bulat n disebut *perfect power* bila terdapat dua bilangan bulat m dan $k > 1$, sehingga $n = m^k$.

► **Contoh 11.**

► Buktikan:

► Dua bilangan bulat yang berturutan, n dan $(n + 1)$ dengan

► $1 \leq n, n + 1 \leq 100$ yang merupakan *perfect power* adalah 8 dan 9, dan tidak ada lainnya.

► Bukti:

► Untuk membuktikan ini dapat dimisalkan $n = m^k$ dengan $m = 1, 2, 3,$

► ..., M dan $k = 2, 3, 4, \dots, K$ dan sehingga $1 \leq n \leq 100$.

$n = m^k$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$	$m=11$
$k = 2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	>100
$k = 3$	1	8	27	64	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 4$	1	16	81	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 5$	1	32	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 6$	1	64	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100
$k = 7$	1	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100	>100

Dari tabel di atas dicari 2 bilangan bulat yang berturutan, n dan $(n+1)$ dengan $1 \leq n$, $n+1 \leq 100$ yang merupakan ***perfect power***. Dan terlihat bahwa bilangan bulat tersebut adalah 8 dan 9, dan tidak ada lainnya.

Tabel tersebut dapat dibuat bila yang diamati tidak terlalu banyak (di sini $1 \leq n$, $n + 1 \leq 100$). Bila masalah yang sama harus dikerjakan untuk $1 \leq n$, $n + 1 \leq 10000$, adalah hal yang tidak mungkin.

(vi) *Proof by cases.*

- Perhatikan bahwa kalimat $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$
- setara dengan kalimat

$$(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

- Jadi untuk membuktikan kalimat pertama, dapat dibuktikan setiap kalimat

$$\text{► } p_i \rightarrow q \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n.$$

- Cara pembuktian ini disebut *proof by cases*.

Contoh 12.

Buktikan: $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n .

Bukti:

Ambil $p := n$ adalah sebuah bilangan bulat,

dan $q := n^2 \geq n$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ dengan

$p_1 := n$ adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$

$p_2 := n = 0$

dan $p_3 := n$ adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau

Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$ maka $n^2 \geq n$.
Ternyata, benar.

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 0$ maka $n^2 \geq n$. Ternyata benar.

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$
maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

Maka $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$ terbukti.

Contoh 13.

Buktikan:

Jika n adalah sebuah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Bukti.

Ambil

$p := n$ adalah sebuah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3,
dan $q := n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2$ dengan

$p_1 := n \equiv 1 \pmod{3}$,
dan $p_2 := n \equiv 2 \pmod{3}$,

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai *proof by cases*, yaitu dengan membuktikan

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau Jika $n \equiv 1 \pmod{3}$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$, dan
(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n \equiv 2 \pmod{3}$, maka $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Untuk (i):

$n \equiv 1 \pmod{3}$, berarti $n = 3k + 1$, untuk suatu bilangan bulat k .

Maka $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$,

jadi $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$

berarti (i) atau $p_1 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (ii):

$n \equiv 2 \pmod{3}$, berarti $n = 3k + 2$, untuk suatu bilangan bulat k .

Maka $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$,

jadi $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

berarti (ii) atau $p_2 \rightarrow q$ terbukti.

Jadi $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$ terbukti.

Contoh 14.

Buktikan: Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \leq 4$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$.

Bukti:

n adalah sebuah bilangan bulat positif dengan $n \leq 4$, berarti $n = 1$ atau $n = 2$ atau $n = 3$ atau $n = 4$.

Ambil $p_1 := n = 1$, $p_2 := n = 2$, $p_3 := n = 3$, $p_4 := n = 4$,
dan $q := (n + 1)^3 \geq 3^n$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

- (i) $p_1 \rightarrow q$ atau Jika $n = 1$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,
- (ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 2$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,
- (iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika $n = 3$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$, dan
- (iv) $p_4 \rightarrow q$ atau Jika $n = 4$, maka $(n + 1)^3 \geq 3^n$,

Untuk (i):

Untuk $n = 1$, $(n + 1)^3 = (1 + 1)^3 = 8 \geq 3$. Berarti $p_1 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (ii):

Untuk $n = 2$, $(n + 1)^3 = (2 + 1)^3 = 27 \geq 3^2$. Berarti $p_2 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iii):

Untuk $n = 3$, $(n + 1)^3 = (3 + 1)^3 = 64 \geq 3^3$. Berarti $p_3 \rightarrow q$ terbukti.

Untuk (iv):

Untuk $n = 4$, $(n + 1)^2 = (4 + 1)^3 = 125 \geq 3^4$. Berarti $p_4 \rightarrow q$ terbukti.

Jadi terbukti $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4) \rightarrow q$.

Contoh 15.

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real x dan y berlaku

$$|xy| = |x| |y|.$$

Bukti:

Berdasarkan definisi harga mutlak: $|x| = \begin{cases} x & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x & \text{untuk } x \leq 0 \end{cases}$,

maka pembuktiannya dibagi menjadi 4 kasus:

Kasus 1: Untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Karena $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \geq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = x$ dan $|y| = y$.

Karena $xy \geq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak, $|xy| = xy$,

sedangkan $|x| |y| = xy$,

jadi, $|xy| = |x| |y|$.

Kasus 2: Untuk $x \geq 0$ dan $y \leq 0$.

Karena $x \geq 0$ dan $y \leq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \leq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = x$, dan $|y| = -y$.

Karena $xy \leq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak $|xy| = -xy$,

sedangkan $|x||y| = -xy$,

jadi, $|xy| = |x||y|$.

Kasus 3: Untuk $x \leq 0$ dan $y \geq 0$.

Buktinya serupa dengan kasus 2.

Kasus 4: Untuk $x \leq 0$ dan $y \leq 0$.

Karena $x \leq 0$ dan $y \leq 0$, maka

berdasarkan sifat bilangan real $xy \geq 0$, dan

berdasarkan definisi harga mutlak, $|x| = -x$, dan $|y| = -y$.

Karena $xy \geq 0$, maka berdasarkan definisi harga mutlak, $|xy| = xy$,

sedangkan $|x||y| = (-x)(-y) = xy$.

jadi, $|xy| = |x||y|$.

Contoh 16.

Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Bukti:

Sebetulnya untuk membuktikannya, harus diperiksa apakah setiap pasangan bilangan bulat x dan y tidak bisa memenuhi persamaan tersebut, hal ini tidak dimungkinkan, maka ditinjau hal berikut:

Karena $x^2 \geq 0$ dan $3y^2 \geq 0$, dan persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$ harus terpenuhi, maka haruslah $3y^2 \leq 8$ dan $x^2 \leq 8$.

Jadi nilai y yang mungkin adalah 0, -1 , atau 1.

Dpl, $3y^2 = 0$ atau $3y^2 = 3$.

Dan nilai x yang mungkin adalah 0, -1 , 1 , -2 , atau 2 .

Dpl, $x^2 = 0$, $x^2 = 1$ atau $x^2 = 4$.

Sekarang tinggal diperiksa apakah kasus-kasus berikut bisa memenuhi persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

Kasus 1: $x^2 = 0$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 0$, jadi kasus 1 tidak bisa memenuhi.

Kasus 2: $x^2 = 1$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 1$, jadi kasus 2 tidak bisa memenuhi.

Kasus 3: $x^2 = 4$ dan $3y^2 = 0$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 4$, jadi kasus 3 tidak bisa memenuhi.

Kasus 4: $x^2 = 0$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 3$,
jadi kasus 4 tidak bisa memenuhi.

Kasus 5: $x^2 = 1$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 4$,
jadi kasus 5 tidak bisa memenuhi.

Kasus 6: $x^2 = 4$ dan $3y^2 = 3$, diperoleh $x^2 + 3y^2 = 7$,
jadi kasus 6 tidak bisa memenuhi.

Jadi terbukti bahwa tidak ada bilangan bulat x dan y yang memenuhi
persamaan $x^2 + 3y^2 = 8$.

- Perhatikan bahwa kalimat

$$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$$

tidak valid, karena kalimat tersebut bernilai *false* terhadap interpretasi

I: $p(F)$ dan $q(T)$.

Maka kalimat tersebut tidak dapat dijadikan suatu aturan.

Jika dijadikan suatu aturan maka akan menimbulkan kesalahan, kesalahan ini disebut ***fallacy of affirming the conclusion***, hal ini dapat dilihat pula pada contoh berikut:

Contoh 17.

(1) Diketahui bahwa

“Jika hari hujan maka kita tidak jadi berlayar”, dan
“Kita tidak jadi berlayar”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Hari hujan”.

(2) Diketahui bahwa

“Jika anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini,
maka anda pandai matematika diskret”, dan
“Anda pandai matematika diskret”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini”.

- Perhatikan bahwa kalimat

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

tidak valid, karena kalimat tersebut bernilai *false* terhadap interpretasi

$\mathbb{I}: p(F)$ dan $q(T)$.

Maka kalimat tersebut tidak dapat dijadikan suatu aturan. Jika dijadikan suatu aturan maka akan menimbulkan kesalahan, kesalahan ini disebut *fallacy of denying the hypothesis*, hal ini dapat dilihat pula pada contoh berikut:

Contoh 18.

- (1) Diketahui bahwa “Jika hari hujan maka kita tidak jadi berlayar”, dan
“Hari tidak hujan”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Kita jadi berlayar”.

- (2) “Jika anda membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini, maka anda pandai matematika diskret”, dan
“Anda tidak membuat semua soal-soal latihan dalam buku ini”.

Maka tidak dapat disimpulkan bahwa
“Anda tidak pandai matematika diskret”.

Circular
reasoning

Circular
reasoning
adalah sebuah
pembuktian
yang
didalamnya
memakai fakta
yang ingin
dibuktikan.

► Contoh 19.

- Tunjukkan bahwa jika n^2 adalah sebuah bilangan genap, maka n adalah sebuah bilangan genap pula.
- Misalkan buktinya adalah sebagai berikut:
 - Karena n^2 adalah sebuah bilangan genap, maka $n^2 = 2k$ dengan k sebuah bilangan bulat
 - $n = 2h$ untuk sebuah bilangan bulat h .
 - Jadi n adalah sebuah bilangan genap

- Bukti tersebut tidak benar, karena telah memakai alasan ' $n=2h$ ' untuk sebuah bilangan bulat h ', untuk menyimpulkan bahwa ' n adalah sebuah bilangan genap'
- Sebetulnya ' $n = 2h$ untuk sebuah bilangan bulat h ' adalah benar jika ' n adalah sebuah bilangan genap' adalah benar, sedangkan ' n adalah sebuah bilangan genap' adalah yang mau dibuktikan kebenarannya.
- Kesalahan dalam pembuktian ini disebut *fallacy of circular reasoning*.