QUANTIFIERS BERSARANG

Departemen Matematika
FMIPA UI

PENDAHULUAN

- Perhatikan kalimat berikut

$$\forall x \; \exists y \; (x + y = 0)$$

- $\forall x \; Q(x)$ dimana $Q(x)$ adalah $\exists y \; P(x, y)$ dimana$P(x, y)$ adalah $x + y = 0$.

Pernyataan dengan *Quantifier* Bersarang

- **Contoh 1**

$$\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$$

$$\forall x\, \exists y\, (x + y = 0)$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

- Contoh 2

Terjemahkan ke dalam bahasa :

$\forall x\, \forall y\, ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$,

dimana domainnya adalah seluruh bilangan real.

Pernyataan dengan *Quantifier* Bersarang

Tentukan kapan pernyataan berikut benar dan kapan salah.

- $\forall x \forall y\ P(x, y)$
- $\forall x \exists y\ P(x, y)$
- $\exists x \forall y\ P(x, y)$
- $\exists x \exists y\ P(x, y)$

Urutan *Quantifier*

Contoh 3

Misalkan $P(x, y)$ adalah pernyataan $x + y = y + x$. Apa nilai kebenaran dari $\forall x \forall y P(x, y)$ dan $\forall y \forall x P(x, y)$ bila domain variabel adalah seluruh bilangan real?

Contoh 4

Misalkan $Q(x, y)$ menyatakan $x + y = 0$. Apa nilai kebenaran dari $\exists y \forall x\, Q(x, y)$ dan $\forall x \exists y\, Q(x, y)$ bila domain variabel adalah seluruh bilangan real?

Urutan *Quantifier*

Contoh 5

Misalkan $Q(x, y, z)$ adalah pernyataan $x + y = z$. Apa nilai kebenaran dari $\forall x \forall y \exists z\ Q(x, y, z)$ dan $\exists z \forall x \forall y\ Q(x, y, z)$ bila domain variabel adalah seluruh bilangan real?

Menterjemahkan Pernyataan Matematika Kedalam Pernyataan *Quantifier* Bersarang

CONTOH

Contoh 6

Terjemahkan kalimat “Jumlah dari dua bilangan bulat positif selalu positif” kedalam ekspresi logika.

Contoh 7

Terjemahkan kalimat “Setiap bilangan real kecuali nol memiliki invers perkalian.”

Contoh 6

1) Tuliskan kembali pernyataan: "Untuk setiap dua bilangan bulat, jika kedua bilangan bulat ini positif, maka hasil penjumlahan kedua bilangan bulat ini positif."
2) Tentukan variabel x dan y: "Untuk setiap bilangan bulat positif x dan y, x+y adalah positif."
3) Tentukan domain: semua bilangan bulat.
4) Jadi : $\forall\, x, \forall y, \big((x > 0) \wedge\ (y > 0)\big) \rightarrow\ (x + y > 0)$.

Bila domain diganti menjadi semua bilangan bulat positif, maka

"Untuk setiap dua bilangan bulat positif, penjumlahannya adalah positif."

Akibatnya, $\forall\, x, \forall\, y, (x + y > 0)$.

Contoh 7

1) Tuliskan kembali: “Untuk setiap bilangan real x kecuali nol, x memiliki invers terhadap perkalian,”
2) Tuliskan kembali: “Untuk setiap bilangan real x, jika $x \neq 0$, maka terdapat bilangan real y sehingga xy=1.”
3) Jadi: $\forall\, x((x \neq\ 0) \to \exists\, y\ (xy = 1))$.

Menterjemahkan Pernyataan *Quantifier* Bersarang Kedalam Bahasa

CONTOH

Contoh 9

Terjemahkan

$$\forall x(C(x) \lor \exists y(C(y) \land F(x,y)))$$

kedalam bahasa dimana: $C(x)$: “x memiliki komputer,” $F(x,y)$: “x dan y berteman” dan domain dari x dan y adalah semua siswa di sekolahmu.

Contoh 10

Terjemahkan pernyataan :

$$\forall x\ \exists y\ \big((F(x,y) \land F(x,z) \land (y \neq z)\big) \rightarrow \neg F(y,z))$$

Kedalam bahasa dimana $F(a,b)$: “a berteman dengan b” dan domain x, y dan z adalah semua siswa di sekolahmu.

Contoh 9

$$\forall x(C(x) \lor \exists y(C(y) \land F(x,y)))$$

- *C(x)* : “*x* punya komputer”
- *F(x,y)* : “*x* dan y adalah teman”
- Domain *x* dan *y* : semua siswa di sekolahmu

SOLUSI

- Setiap siswa *x* di sekolahmu, *x* punya komputer atau ada siswa *y* sehingga *y* punya komputer dan *x* dan *y* berteman.
- *Dengan kata lain*: Setiap siswa di sekolahmu punya komputer atau punya teman yang memiliki komputer.

Contoh 10

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x,y)))$$

- *F(a,b)* berarti *a* dan *b* berteman
- Domain x, y, dan z adalah semua siswa di sekolahmu.

- ***SOLUSI***
- Jika siswa *x* dan *y* berteman, dan siswa *x* dan *z* berteman, dan lebih lanjut, jika *y* dan *z* bukan orang yang sama, maka *y* dan *z* tidak berteman.
- Ada siswa *x* sehingga untuk semua siswa *y* dan semua siswa *z* selain *y*, jika *x* dan *y* berteman dan *x* dan *z* berteman, maka *y* dan *z* tak berteman.
- *Dengan kata lain*: Ada siswa yang tak seorangpun temannya yang saling berteman.

Menterjemahkan Kalimat Bahasa Kedalam Ekspresi Logika

CONTOH

Contoh 11

“Jika seseorang adalah perempuan dan orangtua, maka orang tersebut adalah ibu dari seseorang.”

Contoh 12

“Setiap orang memiliki tepat seorang sahabat.”

Contoh 13

“Ada wanita yang sudah terbang dengan semua maskapai penerbangan di dunia.”

Contoh 11

- Jika seseorang perempuan dan orang tua, maka orang ini adalah ibu dari seseorang
- Untuk setiap orang x, jika x perempuan dan orang tua, maka ada seseorang y sehingga x ibu dari y.
- Variabel : x dan y. Domain : semua orang
- Predikat: $F(x)$: x perempuan, $P(x)$: x orang tua, $M(x,y)$: x ibu dari y
- Maka

$$\forall x\ \Big(\big(F(x) \wedge P(x)\big) \rightarrow \exists y M(x,y)\Big)$$

- Atau (lihat no 29 b lat 1.4)

$$\forall x \exists y\ \big((F(x)) \wedge P(x)) \rightarrow M(x,y)\big)$$

Contoh 12

- Untuk setiap orang x, orang x memiliki tepat seorang sahabat.

  $\forall x$ (x memiliki tepat seorang sahabat)

- x memiliki tepat seorang sahabat → ada y yag merupakan sahabat x.
- Lebih lanjut, untuk setiap orang z, jika ada z yang bukan y, maka z bukan sahabat x
- $B(x, y)$: y sahabat x

  $$\exists y\left(B(x,y) \wedge \left(\forall z(z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)$$

- Jadi: $\forall x\ \exists y\left(B(x,y) \wedge \left(\forall z(z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)$
- Atau $\forall x \exists!\, y B(x, y)$

Contoh 13

- Misalkan : $P(w, f)$: w telah mengambil f

  $Q(f, a)$: f adalah pesawat di a

- Maka:

$$\exists w \forall a \exists f \big(P(w, f) \land Q(f, a)\big)$$

- Dimana : domain w : seluruh wanita di dunia

  domain f : seluruh penerbangan

  domain a : seluruh maskapai penerbangan

Contoh 13

- Pernyataan ini dapat juga ditulis dengan

$$\exists w \forall a \exists f R(w, f, a)$$

- Dimana $R(w, f, a)$ adalah "w telah mengambil f di a."

Negasi dari *quantifier* bersarang

Contoh 14

Nyatakan negasi dari $\forall x \exists y\ (xy = 1)$ sehingga tak ada negasi yang mendahului *quantifier*.

Contoh 15

Gunakan quantifier untuk mengekspresikan pernyataan :
"Tidak terdapat wanita yang telah terbang dengan semua maskapai penerbangan di dunia."

Contoh 14

- Terapkan aturan De Morgan untuk quantifier pada Tabel 2, subbab 1.4

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\exists y\,(xy = 1) &\equiv \exists x\neg\exists y(xy = 1)\\
&\equiv \exists x\forall y\neg(xy = 1)\\
&\equiv \exists x\forall y\; xy \neq 1
\end{aligned}$$

Contoh 15

- Pernyataan ini adalah negasi dari pernyataan Contoh 13: "Terdapat wanita yang telah mengambil pernerbangan dari semua maskapai di dunia."
- Dari Contoh 13, negasi ini dapat ditulis sebagai:

$$\neg \exists w \forall a \exists f \big(P(w, f) \land Q(f, a)\big)$$

- Dimana: $P(w, f)$: w telah mengambil f

  $Q(f, a)$: f adalah pesawat dari a
- Terapkan hukum de Morgan pada Tabel 2 subbab 1.4 dan hukum de Morgan pada negasi dari konjungsi (langkah terakhir) :

Contoh 15 (lanjutan)

$$\begin{aligned}\neg\exists w \forall a \exists f\big(P(w,f) \wedge Q(f,a)\big) &\equiv \forall w \neg\forall a \neg\exists f\big(P(w,f) \wedge Q(f,a)\big)\\ &\equiv \forall w \exists a \neg\exists f\big(P(w,f) \wedge Q(f,a)\big)\\ &\equiv \forall w \exists a \forall f \neg\big(P(w,f) \wedge Q(f,a)\big)\\ &\quad \forall w \exists a \forall f\big(\neg P(w,f) \vee \neg Q(f,a)\big)\end{aligned}$$

Pernyataan ini mengatakan : "Untuk setiap wanita terdapat maskapia penerbangan sehingga untuk setiap pesawat, wanita ini tidak pernah naik pesawat tersebut atau pesawat itu tidak di maskapai tersebut."

SELESAI