Logika Predikat & Kuantifikasi

2 ISI

- Kesetaraan Logika
- Negasi Pernyataan dengan Kuantifikasi
- Menerjemahkan kalimat menjadi ekspresi logika
- Spesifikasi Sistem dg Kuantifikasi

3 Kesetaraan Logika dg Kuantifikasi

DEFINISI 3

- Pernyataan yang melibatkan predikat dan *kuantifikasi* adalah setara secara logika jika dan hanya jika memiliki nilai kebenaran yang sama apapun predikat yang disubstitusi ke dalam pernyataan dan apapun domain yang digunakan dalam fungsi proporsisional.
- Notasi : $S \equiv T$, menyatakan dua pernyataan S dan T yang melibatkan predikat dan *kuantifikasi* adalah setara secara logika.

4 Contoh 19

Tunjukkan bahwa $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ dan $\forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$ adalah setara secara logika.

Solusi:

- Tunjukkan jika $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ maka $\forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$
- Tunjukkan jika $\forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$ maka $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

– Kesetaraan logika ini menunjukkan bahwa kita dapat mendistribusi kuantifikasi universal atas konjungsi.

5 Contoh 19 (lanjutan)

Solusi: misalkan P dan Q adalah predikat atas domain yang sama. Untuk membuktikan $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$, tunjukkan

- Jika $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ benar maka $\forall x P(x) \land \forall Q(x)$ benar
- Jika $\forall x P(x) \land \forall Q(x)$ benar maka $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ benar

6 Contoh 19 (lanjutan)

- Misalkan $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ benar.
- Ini berarti, jika a di domain, maka $P(a) \wedge Q(a)$ benar.
- Akibatnya $P(a)$ benar dan $Q(a)$ benar.
- Karena $P(a)$ benar dan $Q(a)$ benar untuk setiap elemen di domain, maka $\forall x P(x)$ benar dan $\forall x Q(x)$ benar.
- Ini berarti : $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ benar
- Jadi : $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ benar $\rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$ benar

7 Contoh 19 (lanjutan)

- Misalkan $\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$ benar.
- Artinya $\forall x P(x)$ benar dan $\forall x Q(x)$ benar.
- Misalkan a di domain maka $P(a)$ benar dan $Q(a)$ benar. [karena $P(x)$ dan $Q(x)$ benar untuk setiap elemen di domain, maka tidak ada masalah menggunakan nilai a yang sama]
- Maka untuk semua a di domain $P(a) \land Q(a)$ benar.
- Ini mengakibatkan $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ benar.

Jadi : $\forall x P(x) \land \forall Q(x)$ benar maka $\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big)$ benar

8 Contoh 19 (lanjutan)

- Karena :
  - $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ benar $\rightarrow$ $\forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$ benar dan
  - $\forall x P(x) \wedge \forall Q(x)$ benar maka $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ benar
- Maka

$$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

Negasi pernyataan dg kuantifikasi: Contoh 1

Perhatikan pernyataan

- "Setiap mahasiswa di kelasmu telah mengambil mata kuliah Matematika Dasar."
- $\forall x\, P(x)$ dengan $P(x)$: x telah mengambil MK Matematika Dasar dengan domain seluruh mahasiswa di kelasmu.

Negasi :

- Adalah tidak benar setiap mahasiswa di kelasmu telah mengambil MK Matematika Dasar $\left(\neg\forall x\, P(x)\right)$ ≡ Ada siswa di kelasmu yang belum mengambil MK Matematika Dasar $\left(\exists\, x \neg\, P(x)\right)$

– Jadi: $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists\, x \neg\, P(x)$

10 Negasi pernyataan dg kuantifikasi: Contoh 1

Bukti $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists\ x \neg\ P(x)$.

- $\neg\forall x\ P(x)$ adl benar jika dan hanya jika (jdhj) $\forall x\ P(x)$ adl salah.
- $\forall x\ P(x)$ adl salah jdhj ada elemen x di domain dimana $P(x)$ adl salah.
- Ada elemen x di domain dimana $P(x)$ adl. salah dipenuhi jdhj ada elemen x di domain dimana $\neg P(x)$ adl benar.
- Ada elemen x di domain dimana $\neg P(x)$ adl benar jdhj $\exists\ x \neg\ P(x)$ adl benar.
- Jadi: $\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists\ x \neg\ P(x)$.

11 Negasi pernyataan dg kuantifikasi: Contoh 2

- Perhatikan pernyataan :
  - “Ada mahasiswa di kelas ini yang mengambil kuliah Matematika Diskrit.”
- $\neg \exists x\ Q(x) \equiv \forall x\ \neg Q(x)$

Hukum De Morgan untuk kuantifikasi

TABEL 2
Hukum De Morgan untuk *kuantifikasi*

Negasi	Pernyataan setara	Kapan negasi benar?	Kapan salah?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Untuk setiap x, $P(x)$ salah	Ada x dimana $P(x)$ benar
$\neg \forall x\ P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Ada x dimana $P(x)$ salah	$P(x)$ benar untuk setiap x

LATIHAN

– Carilah negasi dari pernyataan berikut.

1. Ada politisi yang jujur.
2. Semua orang Indonesia makan nasi.
3. $\forall x \left(x^2 > x\right)$
4. $\exists x \left(x^2 = 2\right)$
5. Tunjukan $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ dan $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ adalah setara secara logika. Gunakan hukum de Morgan.

14 Menerjemahkan bahasa ke ekspresi logika

1. “Semua siswa di kelas ini telah belajar kalkulus.”
2. Beberapa siswa di kelas ini telah mengunjungi Bali.
3. Setiap siswa di kelas ini sudah mengunjungi Jogja atau Surabaya.

15 CONTOH 23

Nyatakan kalimat berikut ke dalam bentuk ekspresi logika: “Semua siswa di kelas ini telah belajar kalkulus.”

SOLUSI 1

1. Tulis kembali kalimat di atas sehingga kita dapat mengidentifikasi kuantifikasi yang akan digunakan:

   “Untuk setiap siswa di kelas ini, siswa tersebut sudah belajar kalkulus.”

2. Tentukan variabel x sehingga kalimat menjadi: “Untuk setiap siswa x di kelas ini, x sudah belajar kalkulus.”

3. Tentukan domain x: semua siswa di kelas.

4. Tuliskan predikat dari x, yaitu $C(x)$: “x telah belajar kalkulus.”

5. Tuliskan kalimat dalam bentuk ekspresi logika: $\forall x\ C(x)$.

16 Contoh 23 (lanjutan)

SOLUSI 2

Misalkan domain x diganti menjadi semua orang.

- Tulis kembali kalimat di atas: “Untuk setiap orang, jika orang x adalah siswa di kelas maka x telah belajar kalkulus.”
- Pernyataan dalam ekspresi logika: $\forall x\ (S(x) \rightarrow C(x))$

PERHATIKAN

- Pernyataan ini tidak dapat ditulis menjadi: $\forall x\ (S(x) \wedge C(x))$ karena pernyataan ini memiliki makna: setiap orang adalah siswa di kelas dan telah belajar kalkulus.

17 Contoh 23 (lanjutan)

Solusi 3

Misalkan kita memperhatikan latar belakang orang dengan subjek selain kalkulus.

- Gunakan kuantifikasi dua variabel $Q(x, y)$: "siswa x telah mengambil subjek y."
- Ubah $C(x)$ menjadi $Q(x, \text{kalkulus})$
- Pernyataan dalam ekspresi logika:
  - $\forall x\ Q(x, \text{kalkulus})$
  - $\forall x\ (S(x) \rightarrow Q(x, \text{kalkulus}))$

Contoh 24

Nyatakan kalimat berikut ke dalam bentuk ekspresi logika: “Beberapa siswa di kelas ini telah mengunjungi Bali.”

SOLUSI 1

1. Tulis kembali kalimat di atas sehingga kita dapat mengidentifikasi *kuantifikasi* yang akan digunakan:

   “Terdapat siswa di kelas ini dengan sifat bahwa siswa ini telah mengunjungi Bali.”

2. Tentukan variabel x sehingga kalimat menjadi:

   “Terdapat siswa x di kelas ini dengan sifat bahwa x telah mengunjungi Bali.”

3. Tentukan domain x: semua siswa di kelas.
4. Tuliskan predikat dari x, yaitu $B(x)$: “x telah mengunjungi Bali.”
5. Tuliskan kalimat dalam bentuk ekspresi logika: $\exists x\ B(x)$.

19 Contoh 24 (lanjutan)

SOLUSI 2

Misalkan domain x diganti menjadi semua orang.

- Tuliskan kembali kalimat di atas menjadi:
- "Terdapat seseorang x memiliki sifat bahwa x adalah siswa di kelas ini dan x telah mengunjungi Bali."
- Definisikan predikat x, yaitu $S(x)$: x adalah siswa di kelas.
- Pernyataan dalam ekspresi logika: $\exists x\, \big(S(x) \wedge B(x)\big)$

PERHATIAN

- Pernyataan ini tidak dapat ditulis menjadi: $\exists x\, \big(S(x) \rightarrow B(x)\big)$ karena ini juga bernilai benar bila ada seseorang yang tidak di kelas ini.
- Dalam kasus ini, untuk seseorang x, $S(x) \rightarrow B(x)$ menjadi $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B}$ atau $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ dimana keduanya bernilai benar.

Kuantifikasi dalam Spesifikasi Sistem

1. Setiap surat elektronik yang lebih dari satu megabyte akan dimampatkan.
2. Perhatikan pernyataan berikut:
   - “Semua singa adalah buas.”
   - “Singa tidak minum kopi.”
   - “Beberapa binatang buas tidak minum kopi.”

   Dua kalimat pertama disebut **premis**, kalimat ketiga disebut **kesimpulan**. Seluruh himpunan kalimat adalah **argumen**.

21 Contoh

- Perhatikan pernyataan : $\exists\, x\ (x + y = 1)$
- Variabel x terikat oleh kuantifikasi eksistensi, namun variabel y bebas karena tak terikat oleh kuantifikasi dan tak ada nilai yang diberikan pada variabel ini

Contoh

<u>Contoh 16</u>. Misalkan $P(x, y)$: $x + y = y + x$. Apakah nilai kebenaran dari kuantifikasi $\forall x, y\ P(x, y)$?

Jawaban.

– Kuantifikasi $\forall x, y\ P(x, y)$ menyatakan proposisi

– Untuk setiap bilangan real x dan untuk setiap bilangan real y, adalah benar bahwa $x + y = y + x$.

– Karena $P(x, y)$ benar untuk semua bilangan real x dan y maka proposisi $\forall x, y\ P(x, y)$ bernilai benar.

23 LATIHAN

Nyatakan dalam pernyataan yang memuat kuantifikasi

1. Untuk semua x, maka x adalah bilangan bulat negatif
2. Terdapat bilangan x sehingga $x > 0$.
3. Terdapat bilangan rasional x sehingga $x^2 + 1 = 0$.
4. Untuk setiap bilangan real x, terdapat bilangan real y sehingga $x < y$.
5. Terdapat bilangan real sehingga $x < y$ untuk semua x.
6. Jika x bilangan real, maka $x^2 + 1 > 0$.
7. Bilangan real x memenuhi $x^2 > 0$, jika $x > 0$.
8. Jika $x > 0$, maka $x > 4$ atau $x < 6$.

SELESAI