UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

EST. 1849

HIMPUNAN
Bagian 4

DEPARTEMEN MATEMATIKA FMIPA UI

2020

Materi

Operasi Himpunan

OPERASI HIMPUNAN

- **Definisi 1**: Irisan (*intersection*) dua himpunan A dan B adalah

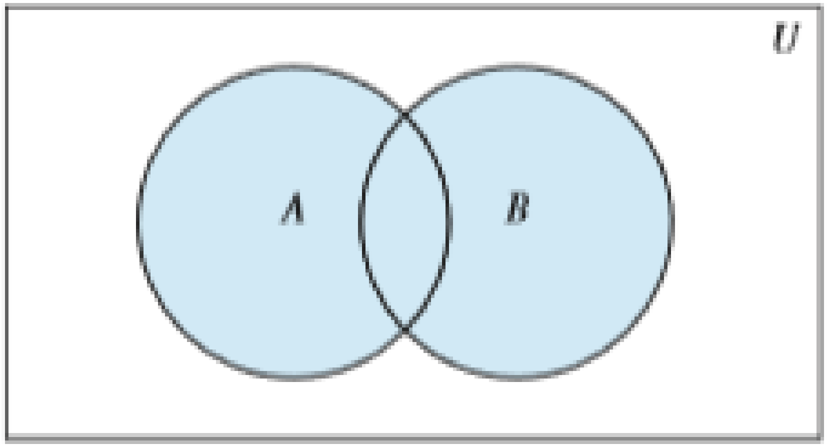
  $$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Definisi 2**: Gabungan (*union*) dua himpunan A dan B adalah

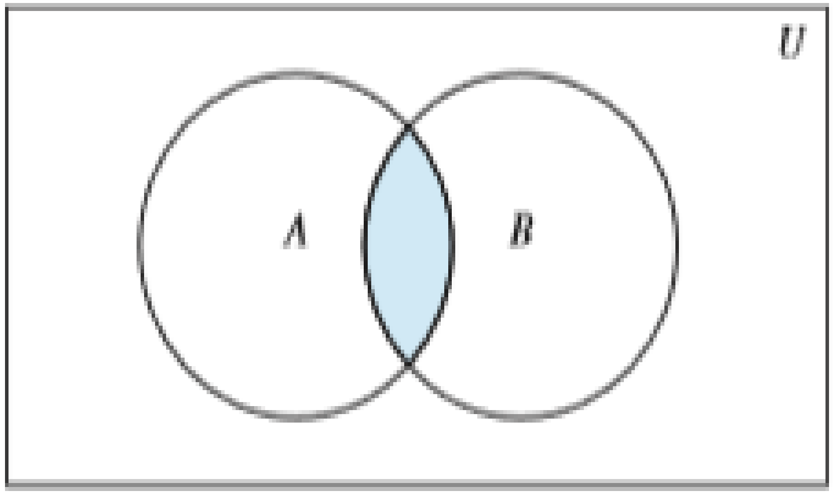
  $$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- **Definisi 3**: Dua himpunan A dan B disebut saling lepas (*disjoint*) jika dan hanya jika $A \cap B = \varnothing$

OPERASI HIMPUNAN



A ∪ B



A ∩ B

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Inklusi-ekslusi dua himpunan

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Contoh 1 Prinsip Inklusi-Eksklusi

Dari 40 siswa di kelas, yang suka bermain basket ada 28 siswa dan suka bermain volley ada 16 siswa. 10 siswa menyukai basket dan volley. Berapa banyak siswa yang tidak menyukai kedua olahraga tersebut?

Jawab :

S= himpunan siswa di kelas

A= himpunan siswa yang suka bermain basket

B= himpunan siswa yang suka bermain volley

Banyak nya siswa yang suka bermain basket atau volley adalah :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 28 + 16 - 10 = 34$$

Banyak nya siswa yang tidak suka kedua olahraga adalah :

$$|(A \cup B)^C| = |S| - |A \cup B| = 40 - 34 = 6$$

OPERASI HIMPUNAN

- **Definisi 4**: Selisih dari himpunan A dan B adalah

$$A - B = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Selisih ini disebut juga komplemen dari himpunan B terhadap himpunan A.

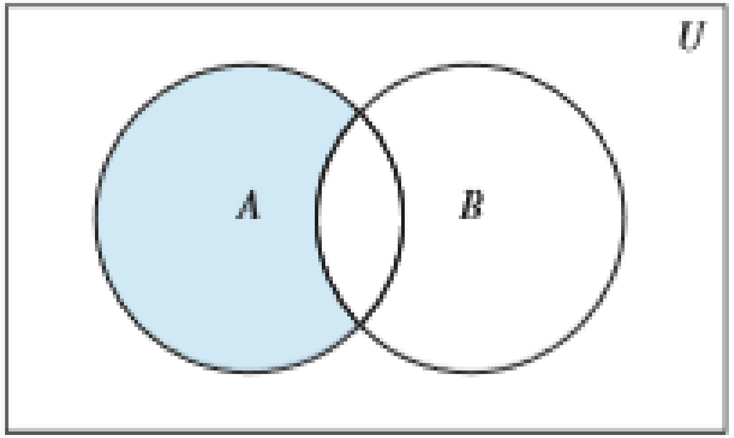
- **Definisi 5**: Komplemen dari himpunan A terhadap himpunan semesta U, ditulis sebagai C(A) atau A^C atau U – A. Jadi

$$C(A) = A^C = U - A.$$

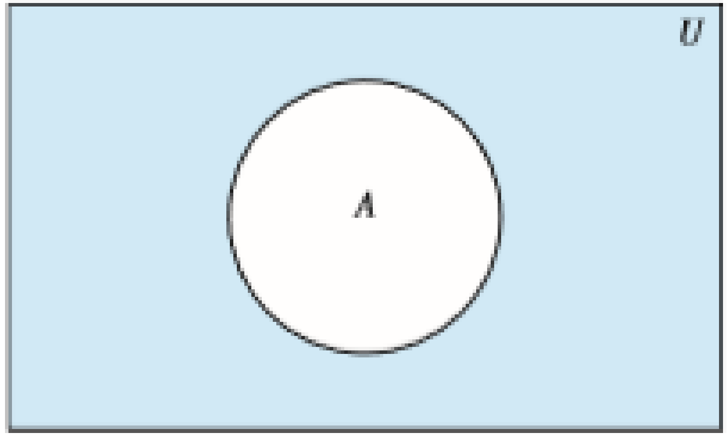
Atau

$$C(A) = A^C = U - A = \{ x \in U : x \notin A\}$$

OPERASI HIMPUNAN



A – B



A^C

OPERASI HIMPUNAN

Contoh 2

Misalkan A = {1, 2, 3}, B = {2, 4}, C = {1, 3, 5}, dan U ={1, 2, 3, 4, …} maka

- $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A - B = \{1, 3\}$
- $C - A = \{5\}$
- $A^C = \{4, 5, 6, \ldots\}$

TABEL 1

Sifat-sifat Operasi Himpunan

Nama Sifat	Sifat
Idempoten	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Identitas	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Dominasi	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
Komplemen ganda	$(A^C)^C = A$
Komutatif	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Asosiatif	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

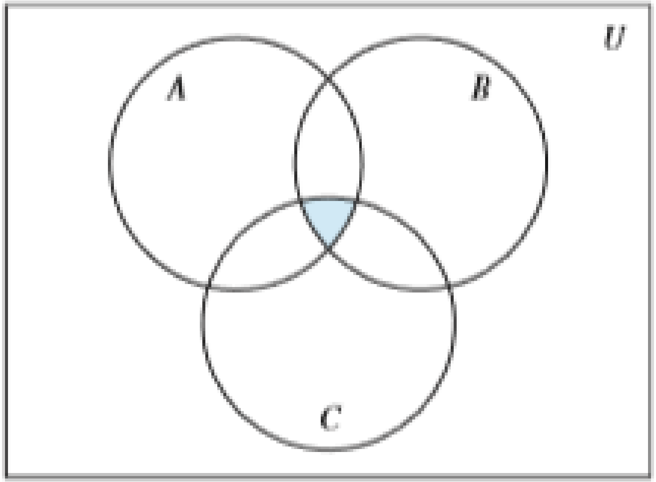
TABEL 2

Sifat-sifat Operasi Himpunan

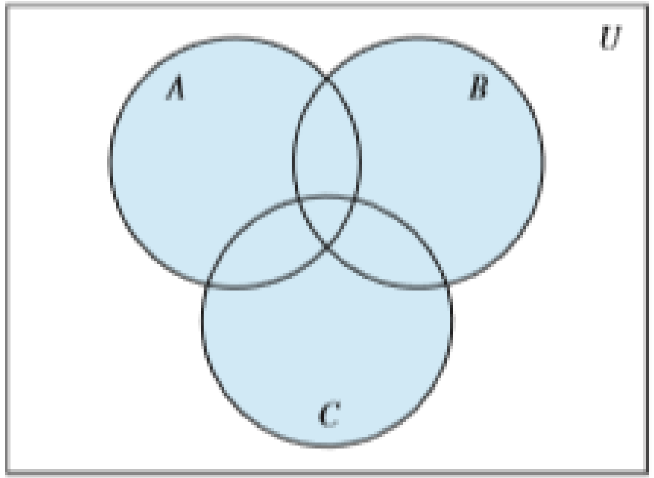
Nama Sifat	Sifat
Distributif	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
Absorbsi	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Komplemen	$A \cup A^C = U$ $A \cap A^C = \varnothing$
	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Generalisasi Irisan dan Gabungan

- Gabungan maupun irisan dua himpunan bisa diperluas untuk tiga atu lebih himpunan
- Karena himpunan memenuhi sifat asosiatif $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, maka tanpa menggunakan tanda kurung dapat didefinisikan $A \cap B \cap C$ dan $A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$

Contoh 3

Misalkan $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dan $C = \{0, 3, 6, 9\}$, tentukan $A \cap B \cap C$ dan $A \cup B \cup C$

Jawab :

$A \cap B \cap C = \{0\}$

$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

Kesamaan pada Himpunan

- Membuktikan kesamaan pada himpunan dapat dilakukan dengan beberapa cara yaitu dengan
  - logika ekivalensi
  - tabel keanggotaan (1 untuk menyatakan anggota dan 0 untuk menyatakan bukan anggota)
  - menggunakan sifat-sifat operasi himpunan yang diberikan pada Tabel 1 dan 2

Contoh 4

Tunjukkan bahwa $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Bukti:

$(A \cap B)^C$

$= \{x \mid x \notin A \cap B\}$ definisi komplemen

$= \{x \mid \neg (x \in (A \cap B))\}$ definisi komplemen

$= \{x \mid \neg (x \in A \wedge x \in B))\}$ definisi irisan

$= \{x \mid \neg (x \in A) \vee \neg (x \in B)\}$ hukum de Morgan

$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$ definisi komplemen

$= \{x \mid x \in A^C \vee x \in B^C\}$ definisi komplemen

$= \{x \mid x \in A^C \cup BC\}$ definisi gabungan

$= A^C \cup B^C$

Contoh 5

Dengan menggunakan tabel keanggotaan tunjukan bahwa

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Contoh 5
Tabel Keanggotaan

Contoh 6

Dengan menggunakan sifat operasi himpunan tunjukkan bahwa

$$(A \cup (B \cap C))^C = (C^C \cup B^C) \cap A^C$$

Bukti:

$(A \cup (B \cap C))^C$

$= A^C \cap (B \cap C)^C$ De Morgan

$= A^C \cap (B^C \cup C^C)$ De Morgan

$= (B^C \cup C^C) \cap A^C$ Komutatif untuk irisan

$= (C^C \cup B^C) \cap A^C$ Komutatif untuk gabungan

DISKUSI

1. Diketahui $A = \{0, 1, 3\}$ tentukan $A^2 = A \times A$ dan A^3.
2. Tunjukkan bahwa
   a) $A - B = A \cap B^C$
   b) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$
   c) $(A \cap B \cap C)^C = A^C \cup B^C \cup C^C$
3. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots 10\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots, 20\}$, dan $C = \{ 0, 3, 6, 9, \ldots., 27\}$. Gambarkan diagram Venn dari himpunan berikut.
   a) $A \cap (B \cup C)$
   b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
   c) $A \cap (B - C)$
4. Apa kaitan himpunan A dan B jika diketahui:
   a) $A \cup B = A$?
   b) $A \cap B = A$?
   c) $A - B = A$?

Terima Kasih