# PROPOSISI EKUIVALEN

DEPARTEMEN MATEMATIKA

PRODI S1 MATEMATIKA STATISTIKA AKTUARIA

DENNY R. SILABAN

REV2020: KIKI A. SUGENG

# MATERI

- Pendahuluan
- Ekuivalensi Logika
- Hukum De Morgan
- Membangun Ekuivalensi Logika baru
- Propositional Satisfiability

# PENDAHULUAN

- Bagian penting dari argumentasi matematika adalah mengubah pernyataan dengan pernyataan lain yang memiliki nilai kebenaran yang sama.

- Terminologi "***pernyataan majemuk***" merujuk pada ekpresi yang dibentuk dari variabel proposisi menggunakan operator logika.

# PENDAHULUAN

**DEFINISI 1**

1. Proposisi majemuk yang selalu benar, apapun nilai kebenaran variabel proposisi yang muncul, disebut ***tautologi***.
2. Proposisi majemuk yang selalu salah disebut ***kontradiksi***.
3. Proposisi majemuk yang tidak tautologi maupun kontradiksi diebut ***kontingensi***.

# Contoh 1

- Tautologi dan kontradiksi yang dibangun dari satu proposisi :

| **Tabel 1 Contoh Tautologi dan Kontradiksi** | | | |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
| T<br>F | F<br>T | T<br>T | F<br>F |

# LOGIKA EKUIVALEN

**DEFINISI 2**

Proposisi majemuk *p* dan *q* dikatakan *ekuivalen secara logika* jika $p \leftrightarrow q$ adalah suatu tautologi.

Notasi $p \equiv q$ menyatakan bahwa *p* dan *q* ekuivalen secara logika.

***Catatan***

Simbol ≡ bukan penghubung logika, dan $p \equiv q$ bukan proposisi majemuk tetapi pernyataan bahwa $p \leftrightarrow q$ adalah suatu tautologi

# Contoh 2

- Tunjukkan bahwa kedua pernyataan majemuk berikut ekuivalen: $\neg(p \vee q)$ dan $\neg p \wedge \neg q$ ➔ Hukum De Morgan

Solusi:

- Salah satu cara menunjukkan apakah dua pernyataan majemuk adalah ekuivalen yaitu dengan menggunakan tabel kebenaran.
- Proposisi majemuk *p* dan *q* dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika kolom yang memberikan nilai kebenaran adalah sama.

# HUKUM DE MORGAN

| **Tabel 3 Hukum De Morgan** |
| --- |
| $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ |
| $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ |

# CONTOH 3

- Tunjukkan bahwa $p \rightarrow q$ ekuivalen secara logika dengan $\neg p \vee q$.
- Solusi:
  - Cara 1: Buatlah tabel kebenaran dari $p \rightarrow q$ dan $\neg p \vee q$, kemudian bandingkan apakah kedua tabel menghasilkan nilai kebenaran yang sama.
  - Cara 2: Periksalah apakah $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ adalah tautologi

# Contoh 3, cara 1

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| T | T | **T** | **T** |
| T | F | **F** | **F** |
| F | T | **T** | **T** |
| F | F | **T** | **T** |

Dari Tabel di atas bisa dilihat bahwa nilai kebenarannya sama.
Jadi kedua pernyataan tersebut ekuivalen.

# LATIHAN 1

- Tunjukkan bahwa $p \vee (q \wedge r)$ dan $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$adalah ekuivalen secara logika.

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ adalah *hukum distribusi* dari disjungsi atas konjungsi

**TABEL 5**

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

| p | q | R | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

# Tabel ekuivalensi logika

| **Tabel 6**<br>**Ekuivalensi Logika** | |
|---|---|
| EKUIVALENSI | NAMA |
| $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$<br>$p \vee \mathbf{F} \equiv p$ | Hukum identitas |
| $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$<br>$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ | Hukum dominasi |
| $p \vee p \equiv p$<br>$p \wedge p \equiv p$ | Hukum idempoten |
| $\neg(\neg p) \equiv p$ | Hukum negasi ganda |
| $p \vee q \equiv q \vee p$<br>$p \wedge q \equiv q \wedge p$ | Hukum komutatif |
| $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ | Hukum asosiatif |
| $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Hukum distributif |

# Tabel ekuivalensi logika (lanjutan)

| **Tabel 6**<br>**Ekuivalensi Logika** | |
|---|---|
| EKUIVALENSI | NAMA |
| $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | Hukum De Morgan |
| $p \vee (p \wedge q) \equiv p$<br>$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ | Hukum absorpsi |
| $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$<br>$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ | Hukum negasi |

# Tabel ekuivalensi logika dengan pernyataan bersyarat

| **Tabel 7**<br>**Ekuivalensi Logika dengan Pernyataan Bersyarat** |
|---|
| $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ |
| $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ (kontra positif) |
| $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$ |
| $p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$ |
| $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ |
| $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$ |
| $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ |
| $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$ |
| $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ |

# Tabel ekuivalensi logika dengan pernyataan bikondisional

| **Tabel 8**<br>**Ekuivalensi Logika dengan Pernyataan Bikondisional** |
| --- |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$ |
| $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ |
| $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ |

# HUKUM DE MORGAN

Hukum De Morgan dapat diperluas menjadi

- $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$
- $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$

Notasi lain:

- $\bigvee_{j=1}^{n} p_j$ untuk $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$

# HUKUM DE MORGAN (lanjutan)

- Hukum De Morgan pada dasarnya menyatakan dua hal:
  - Bagaimana menyatakan negasi dari konjungsi
  - Bagaimana menyatakan negasi dari disjungsi

Contoh:

Gunakan hukum De Morgan untuk menyatakan negasi dari :

- Budi memiliki telepon pintar dan komputer laptop.
- Budi akan pergi ke konser atau Raul akan pergi ke konser.

# MEMBANGUN EKUIVALENSI LOGIKA

- *Contoh 3*

Tunjukkan bahwa $\neg(p \rightarrow q)$ dan $p \wedge \neg q$ adalah ekuivalen secara logika.

- *Solusi*

Dapat diselesaikan dengan menggunakan tabel kebenaran atau menggunakan identitas logika.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{berdasarkan Contoh 3} \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{berdasarkan hukum De Morgan ke dua} \\
&\equiv p \wedge \neg q && \text{berdasarkan hukum negasi ganda}
\end{aligned}
$$

# Latihan 2

- Tunjukkan bahwa $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ dan $\neg p \wedge \neg q$ adalah ekuivalen secara logika.
- Tunjukkan bahwa $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ adalah tautologi.

# SATISFIABLE

- **DEFINISI 3:**
- Suatu proposisi majemuk disebut **satisfiable** apabila terdapat kombinasi nilai kebenaran untuk variabelnya yang membuat proposisi majemuk bernilai benar.
- Apabila nilai kebenaran proposisi majemuk selalu bernilai salah untuk setiap nilai kebenaran dari variabelnya, maka proposisi majemuk disebut unsatisfiable.

# Sifat

- Suatu pernyataan majemuk disebut unsatisfiable jika dan hanya jika negasinya merupakan tautology.
- Jika diperoleh suatu kombinasi nilai kebenaran tertentu yang menghasilkan nilai kebenaran dari proposisi majemuk bernilai benar, maka kombinasi nilai kebenaran disebut sebagai solusi dari masalah satisfiability khusus.

# $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim p)$

- Proposisi majemuk di atas bernilai benar pada saat nilai $p, q$ dan $r$ mempunyai nilai kebenaran yang sama.

# $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge$(rv~p) $\wedge$(pvqvr) $\wedge$(~pv~qv~r)

- Agar proposisi majemuk ini bernilai benar, maka kedua pernyataan berikut harus bernilai benar
  - $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge$(rv~p), dan
  - (pvqvr) $\wedge$(~pv~qv~r)

- $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge$(rv~p) bernilai benar jika ketiga variabel bernilai benar
- (pvqvr) $\wedge$(~pv~qv~r) bernilai benar jika paling sedikit satu variabel bernilai salah.
- → kontradiksi
- Jadi pernyataan di atas unsatisfiable