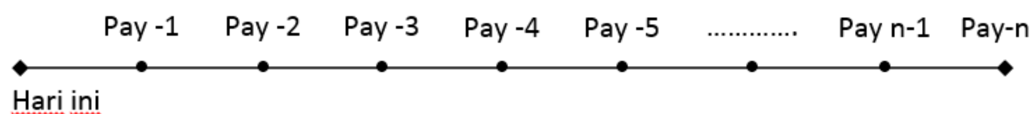
ANUITAS DI MUKA DAN DITUNDA

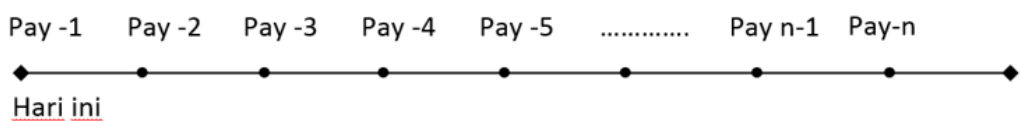
1. 1 ANUITAS DIMUKA

Pada BAB 4, kita telah mempelajari tentag anuitas biasa. Pada dasaranya anuitas dimuka tidak jauh berbeda dengan anuitas biasa, perbedaanya hanya terletak pada pembayaran pertama. Jika pada anuitas biasa pembayaran/penerimaan terakhir dilakukan pada akhir periode pertama atau, maka anuitas dimuka pembayaran/penerimaan pertama dilakukan pada saat transaksi. Dengan demikian untuk kasus jumlah dan waktu periode cicilan yang sama, anuitas dimuka akan selesai lebih cepat dibandingkan dengan anuitas biasa. Untuk lebih jelasnya perbedaan antara anuitas biasa dan dimuka bisa dijelaskan seperti berikut

Pembayaran (pay) cicilan pinjaman Anuitas Biasa



Pembayaran (pay) cicilan pinjaman Anuitas Dimuka



Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, anuitas di muka merupakan anuitas yang pembayaran periodiknya dilakukan pada awal dari interval pembayaran. Karena pembayaran pertama dilakukan di awal periode atau pada hari ini, maka anuitas di muka berkahir satu periode setelah pembayaran terakhir dilakukan.

Seperti pada anuitas biasa, pada anuitas di muka dikenal dua istilah; nilai sekarang *(present value)* yang dinotasikan dengan **PV** dan nilai yang akan datang *(future value)* yang dinotasikan dengan **FV**.

1. 2 NILAI SEKARANG PADA ANUITAS DI MUKA

Karena perbedaan antara anuitas biasa dan anuitas di muka hanya terletak pada pembayaran pertama dan pembayaran terakhir, maka untuk menghitung nilai sekarang pada anuitas di muka pun, sama dengan perhitungan nilai sekarang pada anuitas biasa, dengan sedikit perbedaan periodenya, yaitu **n-1** periode.

Perhatikanlah contoh di bawah ini untuk memahami perbedaan antatara anuitas biasa dan anuitas di muka:

Dari contoh tersebut dapat dilihat bahwa, dengan jumlah periode yang sama, periode pada anuitas di muka berakhir satu periode sebelum periode anuitas biasa berakhir. Sehingga, persamaan untuk menghitung nilai sekarang pada anuitas di muka dinotasikan sebagai berikut:

$$\text{PV} = \left[\overbrace{\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right)A}^{\text{Pembayaran ke 2 - 4}} + \overset{\text{Pembayaran pertama}}{A}\right]$$

Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa PV pada anuitas dimuka sama dengan menghitung PV anuitas biasa dengan jumlah periode (n-1) ditambah dengan nilai pembayaran cicilan pertama pada saat terjadinya transaksi. Persamaan di atas dapat ditulis seperti berikut

$$\text{PV} = \left[\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right) + 1\right]A \quad \textbf{atau}$$

$$\text{PV} = \left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right) + 1\right]A$$

Dengan:

PV = nilai sekarang *(present value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode

CONTOH (1): Hitunglah nilai sekarang dari pembayaran Rp 2.000.000 selama 2 tahun dengan tingkat bunga 12% p.a, jika pembayaran pertama dilakukan hari ini!

Diketahui : P = Rp 2.000.000

$i = \frac{12\%}{12} = 1\%$

n = 2 x 12 = 24

Ditanyakan : PV = ?

Solusi : $PV = P\left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right) + 1\right]$

$= \text{Rp } 2.000.000 \left[\left(\frac{1-(1+0{,}01)^{-24+1}}{0{,}01}\right) + 1\right]$

$= \text{Rp } 2.000.000 \left[\left(\frac{1-(1+0{,}01)^{-23})}{0{,}01}\right) + 1\right]$

= Rp 42.911.642,26

1. 3 MANIPULASI RUMUS NILAI SEKARANG

1.3.1 Menghitung P, jika diketahui PV, i, dan n

$$P = \frac{PV}{\left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right) + 1\right]}$$

CONTOH (1): Lisa membeli sebuah *notebook* seharga Rp 9.550.000 dengan melakukan cicilan sebanyak 18 kali setiap bulan dengan tingkat bunga 18%p.a. Jika pembayarn cicilan pertama dilakukan saat pembelian, berapakah besarnya cicilan perbulan yang harus dibayarkan oleh Lisa?

Diketahui : PV = Rp 9.550.000

$i = \frac{18\%}{12} = 1{,}5\%$

n = 18

Ditanyakan : P = ?

Solusi : P $= \frac{PV}{\left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right)+1\right]}$

$= \frac{Rp\ 9.550.000}{\left(\frac{1-(1+0{,}015)^{-17}}{0{,}015}\right)+1}$

= Rp 600.340,114

1.3.2 Menghitung n, jika diketahui PV, P, dan i

$$\mathbf{n} = -\frac{\log\left(1-\frac{PV\ x\ i}{P}\right)}{\log\left(1+i\right)}$$

CONTOH (2): Untuk melunasi hutang sejumlah Rp 75.000.000, Sari memutuskan untuk mencicil Rp 5.000.000 tiap bulan. Jika pemberi pinjaman mengenakan bunga 12% p.a atas pinjaman tersebut, berpa kali Ari harus melunasi hutangnya?

Diketahui : PV = Rp 75. 000.000

P = Rp 5.000.000

i = $\frac{12\%}{12}$ = 1%

Ditanyakan : n = ?

Solusi : n = $-\frac{\log\left(1-\frac{\mathrm{PV\ x\ i}}{\mathrm{P}}\right)}{\log\left(1+\mathrm{i}\right)}$

$= -\frac{\log\left(1-\frac{\mathrm{Rp\ 75.000.000\ x\ 1\%}}{\mathrm{Rp\ 5.000.000}}\right)}{\log\left(1+1\%\right)}$

$= -\frac{\log 0{,}85}{\log 1{,}01}$

= 16,33 ≈ 17 kali

1.3.3 Menghitung tingkat bunga (i), jika PV, P, dan n diketahui

Pada prinsipnya, perhitungan anuitas di muka tidaklah berbeda dengan perhitungan anuitas biasa, sehingga untuk menghitung tingkat bunga yang dikenakan pada sebuah anuitas di muka menggunakan cara yang sama seperti perhitungan anuitas biasa, yaitu:

1. Cari nilai 2 nilai PV yang lebih besar dan yang lebih kecil dari nilai PV yang diinginkan dengan cara memasukan sembarang nilai **i** ke dalam rumus nilai sekarang dari anuitas. Jika nilai PV yang didapat lebih besar, naikan tingkat bunga agar mendapat nilai PV yang lebih rendah, dan sebaliknya.
2. Setelah memperoleh tingkat bunga yang mengahasilkan PV lebih besar dan lebih kecil, gunakanlah interpolasi sebagai berikut:

$$\frac{i - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{PV - PV_2}{PV_1 - PV_2}$$

CONTOH (3): Berapakah tingkat bunga pertahun yang diberikan jika sebuah pinjaman sebesar Rp 100.000.000 dapat dilunasi dalam 10 kali pembayaran sebesar Rp 11.00.000 di setiap awal bulan?

Diketahui : PV = Rp 100.000.000

P = Rp 11.000.000

n = 10

Ditanyakan : i = ?

Solusi :

Langkah 1, masukan sembarang nilai i:

Missal i = 3% 36% p.a), maka:

$$PV = P\left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right) + 1\right]$$

$$= \text{Rp } 11.000.000 \left[\left(\frac{1-(1+0{,}03)^{-9}}{0{,}03}\right) + 1\right]$$

= Rp 96.647.198,14

Karena PV dengan tingkat bunga 36% p.a lebih kecil dari PV yang diinginkan, maka, turunkan tingkat bunga, missal: 1% (12% p.a), maka:

$$PV = P\left[\left(\frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right) + 1\right]$$

$$= Rp\ 11.000.000 \left[\left(\frac{1-(1+0{,}01)^{-9}}{0{,}01}\right) + 1\right]$$

= Rp 105.226.193,3

Langkah 2, gunakan interpolasi untuk mencari nilai i yang diinginkan

$$\frac{i - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{PV - PV_2}{PV_1 - PV_2}$$

$$\frac{i-1}{3-1} = \frac{Rp\ 100.000.000 - Rp\ 105.226.193{,}3}{Rp\ 96.647.198{,}14 - Rp\ 105.226.193{,}3}$$

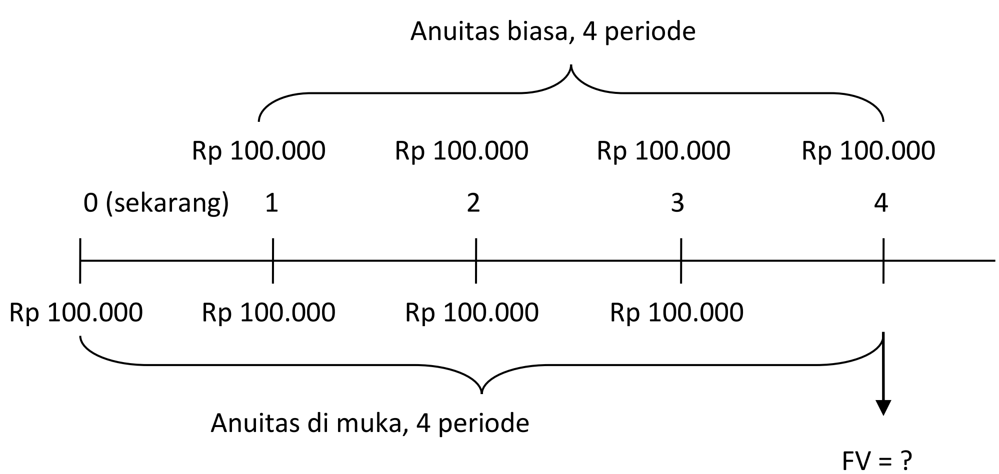
$$\frac{i-1}{2} = \frac{-\,Rp\ 5.226.193{,}3}{-\,Rp\ 8.578.995{,}196}$$

$i - 1 \approx 1{,}21$

$i \approx 2{,}21\% = 26{,}52\%$

1. 4 NILAI YANG AKAN DATANG PADA ANUITAS DI MUKA

Nilai yang akan datang dari sebuah anuitas adalah akumulasi jumlah pembayaran dan jumlah bunga pada akhir periode. Sehingga, pada anuitas di muka nilai yang akan datang ekuivalen dengan jumlah pembayaran dan bunga satu periode setelah pembayaran terkahir sebagaimana ditunjukan oleh gambar berikut ini.



Gambar tersebut menunjukan akumulasi pembayaran sampai periode **(n-1)** sama dengan anuitas biasa, namun karena pembayaran pada anuitas di muka berakhir satu periode lebih cepat dari anuitas biasa, maka kita perlu menabahkan bunga untuk satu periode berikutnya**.** Sehingga, persamaan untuk anuitas di muka adalah sebagai berikut:

$$\text{FV} = \left(\mathbf{P}\ \frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{i}}\right) \times (\mathbf{1}+\boldsymbol{i})$$

Dengan:

FV = nilai yang akan datang *(future value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode

CONTOH (1): Diani menabung Rp 2.000.000 setiap awal bulan selama 5 tahun pada sebuah bank yangmemberikan bunga 10,5%p.a. berapakah jumlah tabungan yang dimiliki Diani pada akhir tahun ke-5?

Diketahui : P = Rp 2.000.000

i $= \frac{10{,}5\%}{12}$ = 0,875%

n = 5 x 12 = 60

Ditanyakan : FV = ?

Solusi : FV $= \left(\mathrm{P}\ \frac{(1+i)^{n}-1)}{i}\right)$ x $(1+i)$

$= \left(\mathrm{Rp}\ 2.000.000\ \frac{(1+0{,}00875)^{60}-1)}{0{,}00875}\right)$ x $(1+0{,}00875)$

= Rp 158.311.030,4

1. 5 MANIPULASI RUMUS NILAI YANG AKAN DATANG

1.5.1 Menghitung P, jika diketahui FV, i, dan n

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{FV}}{\left(\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1})}{\boldsymbol{i}}\right)(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}$$

CONTOH (1): Anis membutuhkan uang Rp 100.000.000 pada tanggal 31 Desember 2023, dan memutuskan untuk menabung setiap tahun, dimulai pada tanggal 1 Januari 2014. Jika bunga atas tabungan tersebut 12%p.a, berapakah jumlah uang yang harus ditabung oleh Anis setiap tahunnya?

Diketahui : FV = Rp 100.000.000

i = 12%

n = 10

Ditanyakan : P = ?

Solusi : $P = \dfrac{FV}{\left(\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right)(1+i)}$

$= \dfrac{\text{Rp } 100.000.000}{\left(\frac{(1+0{,}12)^{10}-1}{0{,}12}\right)(1+0{,}12)}$

= Rp 5.087.871,8

1.5.1 Menghitung n, jika diketahui FV, P, dan i

$$\mathbf{n} = -\frac{\log\left(1+\frac{FV\ x\ i}{P(1+i)}\right)}{\log(1+i)}$$

CONTOH (2): Jika Sara menabung Rp 1.000.000 pada setiap awal bulan pada sebuah bank yangmemberikan bunga 9%p.a, berapa kali Sara harus menabung agar Ia dapat mencapai uang sekurang-kurangnya Rp 76.000.000?

Diketahui : FV = Rp 76. 000.000

P = Rp 1.000.000

i = $\frac{9\%}{12}$ = 0,75%

Ditanyakan : n = ?

Solusi : $n = -\dfrac{\log\left(1+\frac{FV\ x\ i}{P(1+i)}\right)}{\log(1+i)}$

$$= -\frac{\log\left(1 + \frac{\text{Rp } 76.000.000 \text{ x } 0,0075}{\text{Rp } 1.000.000(1+0,0075)}\right)}{\log(1+0,0075)}$$

$$= -\frac{\log 1,5657}{\log 1,0075}$$

= 60,001 = 61 kali

1.5.2 Menghitung i, jika diketahui FV, P, dan n

CONTOH (3): Setelah menabung Rp 5.000.000 sebanyak 20 kali seorang nasabah memperoleh uang sejumlah Rp 126.980.000 Berapakah tingkat bunga yang diberikan oleh bank, jika nasabah tersebut menabung pada setiap awal bulan?

Diketahui : FV = Rp 126.980.000

P = Rp 5.000.000

n = 20

Ditanyakan : i = ?

Solusi :

Langkah 1, masukan sembarang nilai i:

Misal i = 2%, maka:

$$\text{FV} = \left(\text{P } \frac{(1+i)^n - 1)}{i}\right) \text{ x } (1+i)$$

$$= \left(\text{Rp } 5.000.000 \ \frac{(1+0,02)^{20} - 1)}{0,02}\right) \text{ x } (1+0,02)$$

= Rp 123.916.586

Karena FV dengan tingkat bunga 2% lebih kecil dari FV yang diinginkan, maka, naikan tingkat bunga, missal: 3%, maka:

$$\text{FV} = \left(\text{P } \frac{(1+i)^n - 1)}{i}\right) \text{ x } (1+i)$$

$$= \left(\text{Rp } 5.000.000 \ \frac{(1+0,03)^{20} - 1)}{0,03}\right) \text{ x } (1+0,03)$$

= Rp 138.382.428,6

Langkah 2, gunakan interpolasi untuk mencari nilai i yang diinginkan

$$\frac{i-i_2}{i_1-i_2} = \frac{FV-FV_2}{FV_1-FV_2}$$

$$\frac{i-3}{2-3} = \frac{Rp\ 126.980.000 - Rp\ 138.382.428{,}6}{Rp\ 123.916.586 - Rp\ 138.382.428{,}6}$$

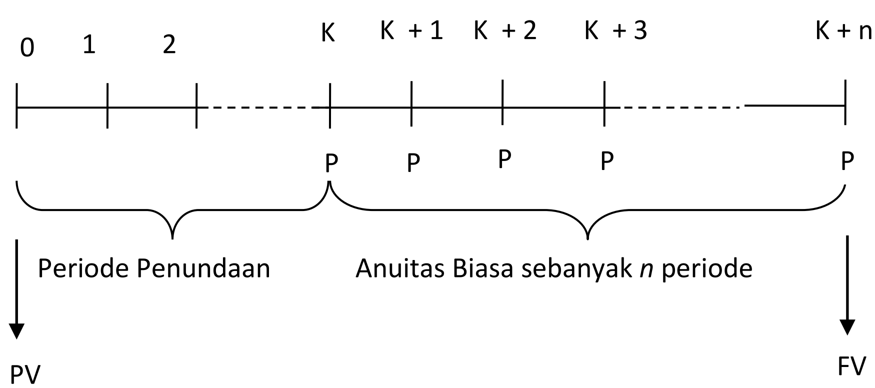
$$\frac{i-3}{-1} = \frac{-Rp\ 11.402.428{,}62}{-Rp\ 14.465.842{,}6}$$

$$i - 3 \approx 0{,}7882$$

$$i \approx 2{,}2118\%$$

1. 6 ANUITAS DITUNDA

Pada prinsipnya anuitas ditunda sama dengan anuitas biasa, namun pembayaran pertamanya ditunda beberapa periode setelah periode pertama pembayaran bunga berakhir, misalnya sebanyak *k* periode. Karena pembayaran pertama anuitas biasa dilakukan pada akhir periode pertama, maka pembayaran pertama pada nuitas ditunda adalah ***k + 1*.** Sehingga jika waktu pembayaran pertama diketahui, nilai selama periode penundaan dapat dihitung menggunakan persamaan bunga majemuk dengan mengurangi satu periode pembayaran bunga.



1. 7 NILAI SEKARANG PADA ANUITAS DITUNDA

$$\textbf{PV} = \frac{\boldsymbol{P}\left[\frac{(\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{i}}\right]}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}}$$

Dengan:

PV = nilai sekarang *(present value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode
k = periode penundaan

CONTOH (1): Hitunglah nilai sekarang dari pembayaran Rp 1.000.000 setiap bulan selama 1 semester, jika pembayaran pertama dilakukan 3 bulan lagi dengan tingakat bunga 18%p.a!

Diketahui : P = Rp 1.000.000

i $= \frac{18\%}{12} = 1{,}5\%$

n = 10

k = 3

Ditanyakan : PV = ?

Solusi : PV $= \frac{\mathrm{P}\left[\frac{(1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}})}{\mathrm{i}}\right]}{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{k}-1}}$

$$= \frac{\text{Rp } 1.000.000 \left[\frac{(1-(1+0{,}015)^{-6})}{0{,}015}\right]}{(1+0{,}015)^{3-1}}$$

= Rp 5.530.041,65

1. 8 MANIPULASI NILAI SEKARANG

1.8.1 Menghitung P, jika diketahui PV, i, k, dan n

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{PV\ (\ 1+i\ )^{k-1}}}{\left[\frac{\boldsymbol{(1-(1+i)^{-n})}}{\boldsymbol{i}}\right]}$$

CONTOH (1): Angga meminjam uang sebesar Rp 100.000.000 dengan bunga 14%p.a dan setuju untuk mengembalikan pinjaman tersebut dalam 14 kali cicilan setiap 6 bulan sekali. Jika pembayaran pertama dilakukan 3,5 tahun yang akan datang, berapakah yang harus dibayarkan Angga setiap kali mencicil pinjaman tersebut?

Diketahui : PV = Rp 100.000.000

$i = \frac{14\%}{2} = 7\%$

n = 14

k = 7

Ditanyakan : P = ?

Solusi : P $= \frac{\mathrm{P\ (1+i)^{k-1}}}{\left[\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}\right]}$

$$= \frac{\mathrm{Rp\ 100.000.000\ (1+0{,}07)^{7-1}}}{\left[\frac{(1-(1+0{,}07)^{-14})}{0{,}07}\right]}$$

= Rp 17.160.092

1. 9 NILAI YANG AKAN DATANG PADA ANUITAS DITUNDA

Nilai yang akan datang pada anuitas ditunda merupakan nilai pada akhir periode yang terdiri atas seluruh pembayaran periodic ditambah dengan akumulasi bunga sampai akhir periode. Sehingga, nilai yang akan datang pada anuitas ditunda sama dengan nilai yang akan datang pada anuitas biasa.

$$\textbf{FV} = \textbf{P}\,\frac{(1+i)^n - 1)}{i}$$

Dengan:

FV = nilai yang akan datang *(future value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode

CHALLENGE QUESTION

1. Hari ini Tifa berulangtahun yang ke-46 tahun, dan memutuskan untuk mulai menabung Rp 10.000.000pertahun pada sebuah bank yang memberikan tingkat bunga 13%p.a. Tifa menabung terakhir kali pada ulang tahunnya yang ke-65, sekaligus memindahkan semua saldo tabungannya pada sebuah dana pensiun yang memberikan bunga 14,5%p.a. Dari dana pensiun ini, Tifa mendapatkan Rp X selama 15 tahun, dimulai saat ia memindahkan uangnya. Berapakah nilai X??
   (Jawaban : Rp 133.322.763,33)