ANUITAS BIASA

## 1. 1 ANUITAS BIASA

Anuitas merupakan konsep yang sangat penting dalam dunia keuangan. Penggunaan konsep anuitas sangat dekat dengan kehidupan sehari-hari, contohnya pembayaran KPR, dan pembayaran bunga obligasi. Dari contoh tersebut, dapat disimpulkan bahawa anuitas merupakan pembayaran dengan jumlah uang dan interval waktu yang sama dalam jangka waktu/periode tertentu. Berdasarkan waktu pembayarannya, anuitas dibedakan menjadi tiga, yaitu anuitas biasa, anuitas di muka, dan anuitas ditunda. Pada anuitas biasa, pembayaran dilakukan pada setiap akhir periode, sedangkan pada anuitas di muka, pembayaran dilakukan pada setiap awal periode. Sementara untuk anuitas ditunda, pembayarannya sama seperti anuitas biasa, yaitu pada setiap akhir periode, namun pembayaran pertamnya ditunda beberapa lama sesuai dengan kesepakatan. Pada praktiknya, jika disebutkan anuitas, maka anuitas yang dimaksud adalah anuitas biasa. Hanya anuitas biasa yang akan dibahas dalam bab ini.

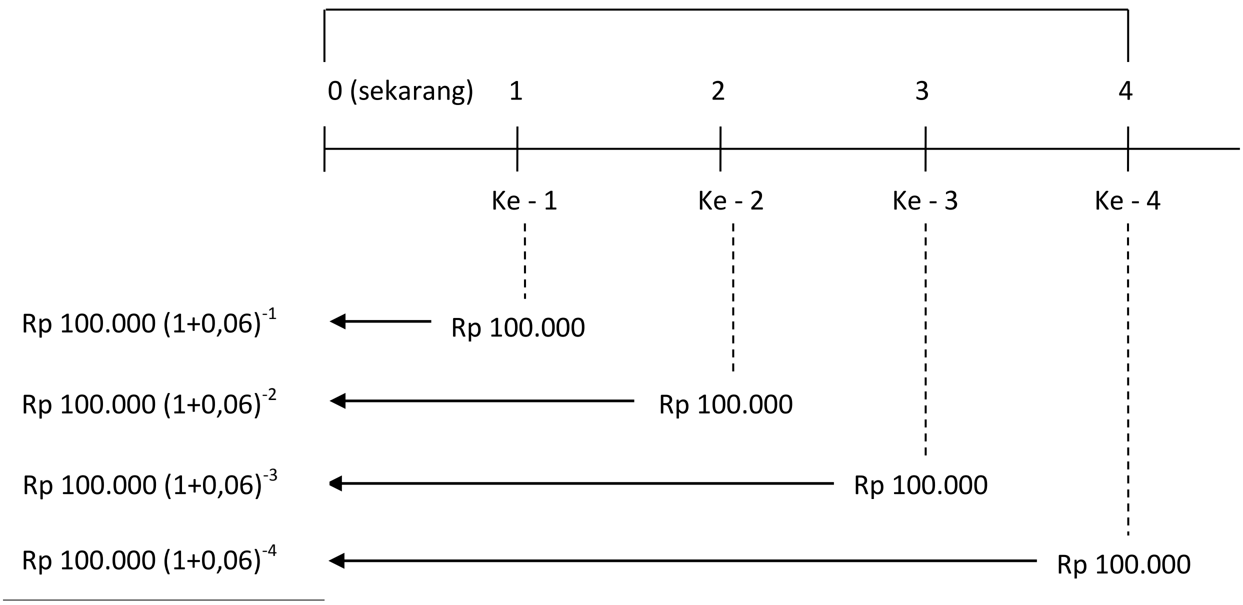
Dalam konsep anuitas, dikenal istilah nilai sekarang *(present value)* yang dinotasikan dengan **PV** dan nilai yang akan datang *(future value)* yang dinotasikan dengan **FV**.

## 1. 2 NILAI SEKARANG PADA ANUITAS BIASA

Perhitungan nilai sekarang dimaksudkan untuk mengetahui nilai saat ini dari sejumlah uang yang akan dibayarkan atau diterima dalam interval waktu tertentu selama periode yang telah ditentukan. Untuk mencari nilai sekarang, kita dapat menggunkan rumus bunga majemuk yang telah dipelajari pada bab sebelumnya.

Perhatikanlah contoh di bawah ini untuk memahami perhitungan nilai sekarang dengan menggunakan persamaan bunga majemuk:

Berapakah nilai sekarang dari uang sejumlah Rp 100.000 yang akan diterima setiap 3 bulan selama satu tahun dengan tingkat bunga 2% perbulan?!




Rp 346.510,56 (Nilai sekarang dari anuitas Rp 100.000 selama 4 periode dengan tingkat bunga 6%)

Perhitungan nilai sekarang dengan menggunakan rumus bunga majemuk memang terlihat mudah dan sederhana, namun bagaimana jika jumlah periodenya banyak? Tentu saja penggunaan rumus bunga majemuk akan memakan waktu karena harus dihitung satu persatu. Nilai sekarang dari anuitas dapat dihitung dengan menggunkan rumus berikut:

$$\mathbf{PV = P\,\frac{(1-(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}})}{\boldsymbol{i}}}$$

Dengan:

PV = nilai sekarang *(present value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode

Untuk soal yang sama, maka:

Diketahui : P = Rp 100.000

i = 2% x 3 = 6%

n = 4

Ditanyakan : PV = ?

Solusi : $PV = P\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$

$= \text{Rp } 100.000\,\frac{(1-(1+6\%)^{-4})}{0,06}$

= Rp 346.510,56

Selain dua cara di atas, penghitungan nilai sekarang dapat pula dicari dengan menggunakan tabel. Jika, menggunakan tabel kita hanya perlu mencocokan tingkat bunga dan jumlah periode, kemudian mengalikannya dengan nilai **P**

Untuk soal yang sama, jika menggunakan tabel, maka:

Diketahui : i = 2% x 3 = 6%

n = 4

Ditanyakan : PV = ?

Solusi :

Dari tabel diketahui nilai sekarang dari faktor anuitas untuk i = 6% dengan 4 periode adalah ----------------

Maka, nilai sekarang dari anuitas tersebut adalah

Rp 100.000 x ----------------

= Rp ----------------

CONTOH (1): Hitunglah nilai sekarang dari pembayaran Rp 2.000.000 di setiap akhir bulan selama 2 tahun dengan tingkat bunga 12%p.a!

Diketahui : P = Rp 2.000.000

$i = \frac{12\%}{12} = 1\%$

n = 2 x 12 = 24

Ditanyakan : PV = ?

Solusi : $PV = P\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$

$= \text{Rp } 2.000.000\,\frac{(1-(1+0{,}01)^{-24})}{0{,}01}$

= Rp 42.486.774,52

## 1. 3 MANIPULASI RUMUS NILAI SEKARANG

### 1.3.1 Menghitung P, jika diketahui PV, i, dan n

Jika, nilai sekarang, tingkat bunga, dan jumlah periode diketahui, maka jumlah uang yang dibayarkan pada setiap periode dapat dihitung dengan cara :

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{PV}}{\frac{(\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{i}}}$$

CONTOH (1): Edi membeli sebuah ruko seharga Rp 500.000.000 dengan membayar uang muka Rp 100.000.000 dan sisanya dicicil sebanyak 18 kali yang dibayarkan pada setiap akhir bulan. Jika bunga yang dikenakan atas ruko adalah 12%p.a, berapakah yang harus dibayarkan Edi setiap bulannya?

Diketahui : PV = Rp 400.000.000

$i = \frac{12\%}{2} = 1\%$

n = 18

Ditanyakan : P = ?

Solusi : $P = \frac{PV}{\frac{(1-(1+i)^{-n}}{i}}$

$= \frac{Rp\ 400.000.000}{\frac{(1-(1+0{,}01)^{-18}}{0{,}01}}$

= Rp 24.392.819,16

### 1.3.2 Menghitung n, jika diketahui PV, P, dan i

Dari rumus awal kita dapat mengetahui berapa periode yang diperlukan untuk membuat sejumlah uang yang diterima di masa depan memiliki nilai sekarang yang diinginkan. Berikut merupakan cara untuk menghitung jumlah periode:

$$\mathbf{n} = -\frac{\boldsymbol{log}\ (\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{PV\ x\ i}}{\boldsymbol{P}})}{\boldsymbol{log}\ (\mathbf{1}+\boldsymbol{i})}$$

CONTOH (2): Untuk melunasi hutang sejumlah Rp 50.000.000, Sari memutuskan untuk mencicil Rp 2.500.000 tiap bulan. Jika pemberi pinjaman mengenakan bunga 10% p.a atas pinjaman tersebut, berpa kali Ari harus melunasi hutangnya?

Diketahui : PV = Rp 50. 000.000

P = Rp 2.500.000

$i = \frac{10\%}{12} = 0{,}833\%$

Ditanyakan : $n = ?$

Solusi : $n = -\frac{\log\left(1 - \frac{PV \times i}{P}\right)}{\log(1+i)}$

$= -\frac{\log\left(1 - \frac{Rp\ 50.000.000 \times 0{,}833\%)}{Rp\ 2.500.000}\right.}{\log(1+0{,}833\%)}$

$= -\frac{\log 0{,}8334}{\log 1{,}00833}$

$= 21{,}96 \approx 22$ kali

### 1.3.3 Menghitung tingkat bunga (i), jika PV, P, dan n diketahui

Jika nilai sekarang, besar pembayaran tiap periode, dan jumlah periode, kita bisa mencari tingkat bunga dengan 2 langkah sederhana berikut ini:

1. Cari nilai 2 nilai PV yang lebih besar dan yang lebih kecil dari nilai PV yang diinginkan dengan cara memasukan sembarang nilai **i** ke dalam rumus nilai sekarang dari anuitas. Jika nilai PV yang didapat lebih besar, naikan tingkat bunga agar mendapat nilai PV yang lebih rendah, dan sebaliknya.
2. Setelah memperoleh tingkat bunga yang mengahasilkan PV lebih besar dan lebih kecil, gunakanlah interpolasi sebagai berikut:

$$\frac{i - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{PV - PV_2}{PV_1 - PV_2}$$

CONTOH (3): Berapakah tingkat bunga pertahun yang diberikan jika sebuah pinjaman sebesar Rp 100.000.000 dapat dilunasi dalam 20 kali pembayaran sebesar Rp 5.500.000 di setiap akhir bulan?

Diketahui : PV = Rp 100.000.000

P = Rp 5.500.000

n = 20

Ditanyakan : i = ?

Solusi :

**Langkah 1**, masukan sembarang nilai i:

Missal i = 1% (12% p.a), maka:

PV = P $\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$

PV = Rp 5.500.000 $\frac{(1-(1+0,01)^{-20})}{0,01}$

= Rp 99.250.541,31

Karena PV dengan tingkat bunga 12% p.a lebih kecil dari PV yang diinginkan, maka, turunkan tingkat bunga, missal: 0,833% (10% p.a), maka:

PV = P $\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$

PV = Rp 5.500.000 $\frac{(1-(1+0,00833)^{-20})}{0,00833}$

= Rp 100.939.511,2

**Langkah 2**, gunakan interpolasi untuk mencari nilai i yang diinginkan

$$\frac{i-i_2}{i_1-i_2} = \frac{PV-PV_2}{PV_1-PV_2}$$

$$\frac{i-0,833}{1-0,833} = \frac{Rp\ 100.000.000 - Rp\ 100.939.511,2}{Rp\ 99.250.541,31 - Rp\ 100.939.511,2}$$

$$\frac{i-0,833}{0,167} = \frac{-Rp\ 939.511,2}{-Rp\ 1.688.969,89}$$

i – 0,833 ≈ 0,092

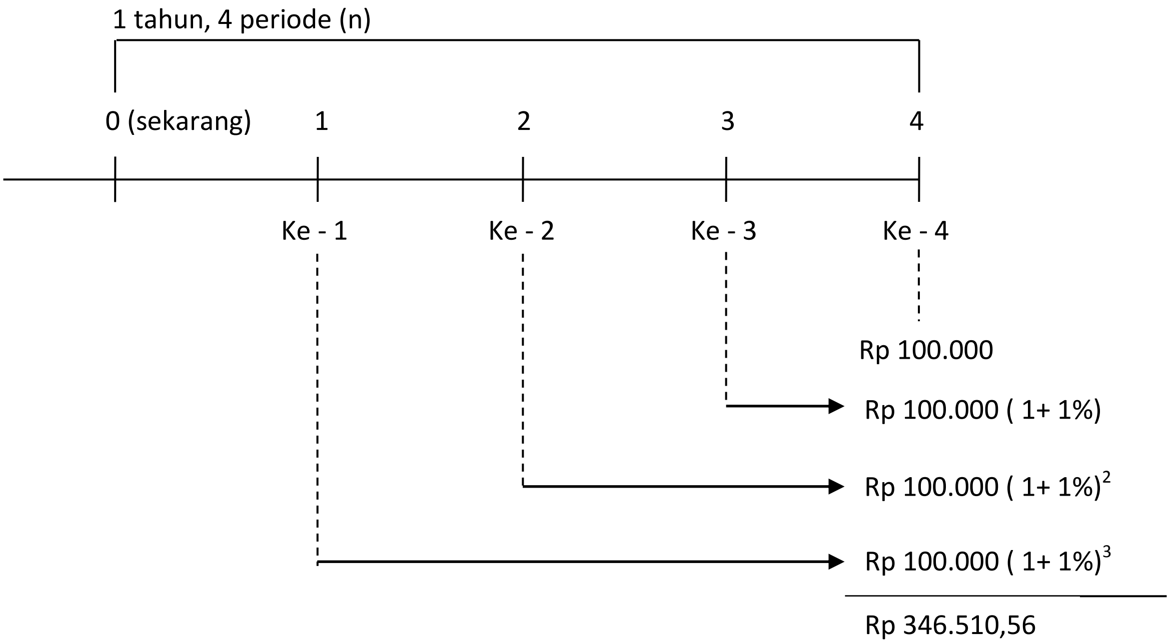
i ≈ 0,925% = 11,1% p.a

## 1. 4 NILAI YANG AKAN DATANG PADA ANUITAS BIASA

Nilai yang akan datang dari sebuah anuitas merupakan nilai pada akhir periode anuitas tersebut. Jumlah tersebut merupakan jumlah seluruh pembayaran di tiap periode ditambah dengan bunga.

Perhatikan contoh berikut!

Berapakah nilai yang akan datang dari pembayaran Rp 100.000 setiap tiga bulan selama satu tahun, dengan tingkat bunga 4% p.a




Secara sistematis, persamaan untuk nilai yang akan datang dari sebuah anuitas biasa adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{FV = P\,\frac{(1+\mathit{i})^{\mathit{n}}-1)}{\mathit{i}}}$$

Dengan:

PV = nilai sekarang *(present value)*
P = jumlah yang dibayarkan secara periodik *(payment)*
i = tingkat bunga
n = jumlah periode

Untuk soal yang sama, maka:

Diketahui : P = Rp 100.000

$i = \frac{4\%}{4} = 1\%$

n = 4

Ditanyakan : FV = ?

Solusi : FV = P $\frac{(1+i)^n - 1)}{i}$

$= \text{Rp } 100.000 \frac{(1+1\%)^4 - 1)}{0,01}$

= Rp 406.040,1

Sama seperti nilai sekarang, nilai yang akan datang dapat pula dicari dengan menggunakan tabel. Jika, menggunakan tabel kita hanya perlu mencocokan tingkat bunga dan jumlah periode, kemudian mengalikannya dengan nilai **P**

Untuk soal yang sama, jika menggunakan tabel, maka:

Diketahui : i = $\frac{4\%}{4}$ = 1%

n = 4

Ditanyakan : FV = ?

Solusi :

Dari tabel diketahui nilai yang akan datang dari faktor anuitas untuk i = 1% dengan 4 periode adalah ----------------

Maka, nilai sekarang dari anuitas tersebut adalah

Rp 100.000 x ----------------

= Rp ----------------

## 1. 5 MANIPULASI RUMUS NILAI SEKARANG

### 1.5.1 Menghitung P, jika diketahui FV, i, dan n

Jika, nilai yang akan datang, tingkat bunga, dan jumlah periode diketahui, maka jumlah uang yang dibayarkan pada setiap periode dapat dihitung dengan cara :

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{FV}}{\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1})}{\boldsymbol{i}}}$$

CONTOH (1): Frida menabung dengan jumlah yang sama tiap bulan. Setelah menabung selama 2,25 tahun, jumlah uang Frida adalah Rp 450.000.000. Jika, bank tersebut memberikan bunga 12% p.a, berapakah jumlah yang disetor Frida setiap akhir bulan?

Diketahui : FV = Rp 450.000.000

$i = \frac{12\%}{2} = 1\%$

n = 2,25 x 12 = 27

Ditanyakan : P = ?

Solusi : $P = \frac{FV}{\frac{(1+i)^{n}-1}{i}}$

$= \frac{Rp\ 450.000.000}{\frac{(1+0,01)^{27}-1}{0,01}}$

= Rp 14.600.487,91

### 1.5.1 Menghitung n, jika diketahui FV, P, dan i

Untuk menentukan periode, kita dapat menggunakan persamaan awal dari nilai yang akan datang, sebagai berikut :

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{log\ (1+\frac{FV\ x\ i}{P})}}{\boldsymbol{log\ (1+i)}}$$

CONTOH (2): Untuk mengisi liburan Dea berencana untuk menabung Rp 2.000.000 di bank mulai akhir bulan ini, jika uang yang diperlukan Dea adalah Rp 25.000.000 dan bank memberikan bunga 10%p.a, berapa bulan waktu yang diperlukan oleh Dea?

Diketahui : FV = Rp 25. 000.000

P = Rp 2.000.000

$i = \frac{10\%}{12} = 0,833\%$

Ditanyakan : n = ?

Solusi : $n = \dfrac{\log\left(1 + \frac{\text{FV x i}}{\text{P}}\right)}{\log(1+\text{i})}$

$= \dfrac{\log\left(1 + \frac{\text{Rp } 25.000.000 \text{ x } 0{,}00833}{\text{Rp } 2.000.000}\right)}{\log(1+0{,}00833)}$

$= \dfrac{\log 1{,}104125}{\log 1{,}00833}$

= 11,94 ≈ 12 kali

### 1.5.2 Menghitung i, jika diketahui FV, P, dan n

Sama seperti perhiutngan tingkat bunga pada persamaan nilai sekarang, jika nilai yang akan datang, besar pembayaran tiap periode, dan jumlah periode, kita bisa mencari tingkat bunga dengan 2 langkah sederhana berikut ini:

1. Cari nilai 2 nilai FV yang lebih besar dan yang lebih kecil dari nilai PV yang diinginkan dengan cara memasukan sembarang nilai **i** ke dalam rumus nilai sekarang dari anuitas. Jika nilai FV yang didapat lebih besar, turunkan tingkat bunga agar mendapat nilai FV yang lebih rendah, dan sebaliknya.

3. Setelah memperoleh tingkat bunga yang mengahasilkan FV lebih besar dan lebih kecil, gunakanlah interpolasi sebagai berikut:

$$\frac{i - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{FV - FV_2}{FV_1 - FV_2}$$

CONTOH (3): Jika setelah menabung Rp 10.000.000 sebanyak 20 kali seorang nasabah memperoleh uang sejumlah Rp 225.544.555, berapakh tingkat bunga yang diberikan oleh bank?

Diketahui : FV = Rp 225.544.555

P = Rp 10.000.000

n = 20

Ditanyakan : i = ?

Solusi :

**Langkah 1**, masukan sembarang nilai i:

Missal i = 1%, maka:

FV = P $\frac{(1+i)^n - 1)}{i}$

FV = Rp 10.000.000 $\frac{(1+0,01)^{20} - 1)}{0,01}$

= Rp 220.190.039,9

Karena FV dengan tingkat bunga 1% lebih kecil dari FV yang diinginkan, maka, naikan tingkat bunga, missal: 2% p.a), maka:

FV = P $\frac{(1+i)^n - 1)}{i}$

FV = Rp 10.000.000 $\frac{(1+0,02)^{20} - 1)}{0,02}$

= Rp 242.973.698

**Langkah 2**, gunakan interpolasi untuk mencari nilai i yang diinginkan

$$\frac{i - i_2}{i_1 - i_2} = \frac{FV - FV_2}{FV_1 - FV_2}$$

$$\frac{i-2}{1-2} = \frac{Rp\ 225.544.555 - Rp\ 242.973.698}{Rp\ 220.190.039{,}9 - Rp\ 242.973.698}$$

$$\frac{i-2}{-1} = \frac{-Rp\ 17.429.143}{-Rp\ 22.783.658{,}1}$$

i – 2 ≈ - 0,764

i ≈ 1,235%

**CHALLENGE QUESTION**

1. Dengan menabung sebesar Rp 1.000.000 setiap bulan Dina mengharapkan akan memperoleh uang sebesar Rp 20.000.000 dalam 1 tahun. Berapakah setoran yang dibutuhkan jika Dina mengharapkan uang Rp 30.000.000 di akhir tahun pertama?
   (Jawaban : Rp 1.513.256,704)

2. Ani bersedia membayar utangnya sebesar Rp 100.000.000 dengan mencicil setiap akhir bulan selama 3 tahun bunga 10%p.a, jika setelah mecicil sebanyak 12, Ani berencana untuk mempercepat pelunasan dari 3 tahun menjadi 2 tahun, berapakah besar angsuran yang harus dibayar Aniselama 12 bulan berikutnya, jika pihak pemberi pinjaman menaikan bunga sebesar 2%?
   (Jawaban: Rp 3.291.588,107)