

Teknik Pengintegralan

7.5 Pengintegralan fungsi rasional dengan pecahan parsial

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Fungsi rasional adalah fungsi yang merupakan hasil bagi 2 fungsi polinomial.

Fungsi rasional sejati (*proper rational function*) adalah fungsi rasional yang derajat pembilangnya $<$ derajat penyebutnya.

Contoh: $\frac{2}{x+1}, \frac{2x+2}{x^2+2x-4}.$

Fungsi rasional tak-sejati (*improper rational function*) adalah fungsi rasional yang derajat pembilangnya $\geq$ derajat penyebutnya, sehingga fungsi rasional tersebut bisa ditulis sebagai penjumlahan fungsi polinomial dan fungsi rasional sejati.

Contoh: $\frac{x^5 + 2x^3 - x + 1}{x^3 + 5x} = x^2 - 3 + \frac{14x + 1}{x^3 + 5x}.$

Fungsi rasional sejati dapat didekomposisi sebagai penjumlahan pecahan parsial yang penyebut pecahan parsialnya merupakan **faktor linier** (fungsi polinomial berderajat 1).

Contoh 1

Dekomposisilah fungsi rasional sejati $\frac{3x+2}{x^2+x}$ sebagai penjumlahan pecahan parsial!

Penyebutnya dapat difaktorkan sebagai $x^2+x = x(x+1)$.

Misalkan
$$\frac{3x+2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Dengan menyamakan penyebut kedua ruas, pembilangnya menghasilkan $3x+2 = A(x+1) + Bx$.

Jika $x = -1$, maka $B = 1$. Jika $x = 0$, maka $A = 2$.

Jadi
$$\frac{3x+2}{x^2+x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Jenis-jenis faktor linier yang ditinjau:

- 1 Faktor liniernya berbeda (*distinct*),
- 2 Faktor liniernya berulang (*repeated*),
- 3 Kombinasi faktor linier berbeda dan berulang.

Contoh 2 (Faktor linier berbeda)

Tentukanlah $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} dx$

Misalkan $\frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3}$.

Dengan menyamakan penyebut kedua ruas, didapat

$$3x - 1 = A(x - 3) + B(x + 2) \text{ atau}$$

$$3x - 1 = (A + B)x + (-3A + 2B).$$

Hal ini menghasilkan **Sistem Persamaan Linier** (SPL):

$$A + B = 3 \text{ dan } -3A + 2B = -1.$$

Dengan menyelesaikan SPL tersebut, didapat $A = \frac{7}{5}$ dan $B = \frac{8}{5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} dx &= \frac{7}{5} \int \frac{1}{x + 2} dx + \frac{8}{5} \int \frac{1}{x - 3} dx \\ &= \frac{7}{5} \ln |x + 2| + \frac{8}{5} \ln |x - 3| + C. \end{aligned}$$

Contoh 3 (Faktor linier berulang)

Tentukanlah $\int \frac{x}{(x-3)^2} dx$

Misalkan $\frac{x}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$.

Dengan menyamakan penyebut kedua ruas, didapat

$$x = A(x-3) + B \text{ atau } x = Ax + B - 3A.$$

Akibatnya $A = 1$ dan $B - 3A = 0$ atau $B = 3A = 3$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-3)^2} dx &= \int \frac{1}{x-3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x-3} d(x-3) + 3 \int \frac{1}{(x-3)^2} d(x-3) \\ &= \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C. \end{aligned}$$

Contoh 4 (Kombinasi faktor linier berbeda dan berulang)

Tentukanlah $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx$.

Misalkan $\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.

Dengan menyamakan penyebut kedua ruas, didapat

$$3x^2 - 8x + 13 = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3).$$

Dengan mensubstitusi $x = 1$, $x = -3$, $x = 0$, didapat $C = 2$, $A = 4$ dan $B = -1$.

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx \\ &= 4 \int \frac{1}{x+3} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= 4 \ln |x+3| - \ln |x-1| - \frac{2}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Dengan membatasi kajian pada himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, fungsi rasional sejati dapat didekomposisi sebagai penjumlahan pecahan parsial yang penyebut pecahan parsialnya melibatkan **faktor kuadrat** (fungsi polinomial berderajat 2).

Jenis-jenis faktor kuadrat yang ditinjau:

- 1 Faktor kuadratnya tunggal,
- 2 Faktor kuadratnya berulang,

Contoh 5

Dekomposisikanlah fungsi rasional sejati $\frac{4x^2 - 8x + 16}{x^3 - 4x^2 + 8x}$ sebagai penjumlahan pecahan parsial!

Dari pemfaktoran penyebutnya: $x^3 - 4x^2 + 8x = x(x^2 - 4x + 8)$.

Misalkan $\frac{4x^2 - 8x + 16}{x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 8}$.

Dengan menyamakan penyebut kedua ruas, pembilangnya menghasilkan $4x^2 - 8x + 16 = A(x^2 - 4x + 8) + Bx^2 + Cx$ atau

$$4x^2 - 8x + 16 = (A + B)x^2 + (C - 4A)x + 8A.$$

Dengan menyamakan koefisien, didapat $A = 2$, $B = 2$ dan $C = 0$.

Jadi

$$\frac{4x^2 - 8x + 16}{x^3 - 4x^2 + 8x} = \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2 - 4x + 8}.$$

Contoh 6 (Faktor kuadratnya tunggal)

Tentukanlah $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx$.

Misalkan
$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{4x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Selanjutnya didapat

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1).$$

Dengan mensubstitusi $x = -\frac{1}{4}$, $x = 0$ dan $x = 1$ didapat $A = 2$, $B = 1$, $C = -1$.

$$\begin{aligned}& \int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx \\&= 2 \int \frac{1}{4x + 1} dx + \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{4}{4x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{d(4x + 1)}{4x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\&= \frac{\ln|4x + 1|}{2} + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} - \arctan x + C.\end{aligned}$$

Contoh 7 (Faktor kuadratnya berulang)

Tentukanlah $\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$.

Misalkan
$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}.$$

Dengan menyelesaikan SPL dari persamaan di atas, didapat $A = 1$, $B = -1$, $C = 3$, $D = -5$ dan $E = 0$.

$$\begin{aligned}& \int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx \\&= \int \frac{1}{x+3} dx - \int \frac{x-3}{x^2+2} dx - 5 \int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx \\&= \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{3}{x^2+2} dx - \frac{5}{2} \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx \\&= \int \frac{d(x+3)}{x+3} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} + \int \frac{3}{x^2+2} dx - \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)^2} \\&= \ln|x+3| - \frac{\ln(x^2+2)}{2} + \frac{3 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2(x^2+2)} + C.\end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

Tentukanlah

$$① \int \frac{s-7}{s^2-s-12} ds$$

$$② \int \frac{2t^2-t-20}{t^2+t-6} dt$$

$$③ \int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)} dx$$

$$④ \int \frac{6x^2+22x-23}{(2x-1)(x^2+x-6)} dx$$

$$⑤ \int \frac{2s^2+s-8}{s^3+4s} ds$$

$$⑥ \int \frac{\cos t}{\sin^4 t - 16} dt$$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI