

Bab 7. Teknik Pengintegralan

7.4 Substitusi yang merasionalkan

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Jika akar atau **radikal** (*radical*) $\sqrt[n]{ax+b}$ muncul dalam integral, gunakan substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$ untuk merasionalkan (menghilangkan radikal).

Contoh 1

Tentukanlah $\int \frac{t}{\sqrt{3t+4}} dt$.

Misalkan $u = \sqrt{3t+4}$, sehingga $u^2 = 3t+4$ dan $2u du = 3 dt$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t}{\sqrt{3t+4}} dt &= \frac{2}{9} \int u^2 - 4 du \\
 &= \frac{2}{9} \left(\frac{u^3}{3} - 4u \right) + C \\
 &= \frac{2}{27} (3t - 8) \sqrt{3t+4} + C.
 \end{aligned}$$

Jika radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ muncul dalam integral, gunakan

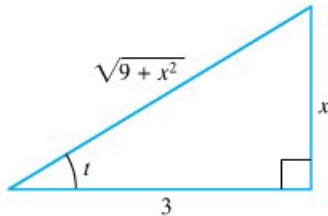
Radikal	Substitusi	Batasan pada t
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$0 \leq t \leq \pi, t \neq \pi/2$

Gunakanlah segitiga siku-siku dan Teorema Pythagoras untuk mengingat tabel di atas.

Contoh 2

Tentukanlah $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$.

Radikal $\sqrt{9+x^2}$ berkaitan dengan segitiga berikut.



Misalkan $x = 3 \tan t$, dengan $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Perhatikan $dx = 3 \sec^2 t \, dt$ dan $\sqrt{9+x^2} = 3 \sec t$.

Lebih lanjut,

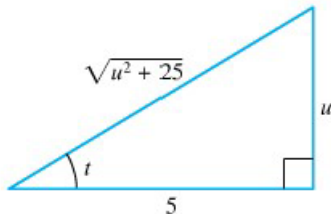
$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx \\
 &= \int \frac{3 \sec^2 t}{3 \sec t} dt \\
 &= \int \sec t \, dt \\
 &= \ln |\sec t + \tan t| + C \\
 &= \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2} + x}{3} \right| + C \\
 &= \ln |\sqrt{9+x^2} + x| - \ln 3 + C \\
 &= \ln |\sqrt{9+x^2} + x| + K.
 \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukanlah $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx$.

Radikal $\sqrt{x^2 + 2x + 26} = \sqrt{(x+1)^2 + 25}$.

Misalkan $u = x + 1$, sehingga radikalnya menjadi $\sqrt{u^2 + 25}$ dan berkaitan dengan segitiga berikut.



Misalkan $u = 5 \tan t$, sehingga $du = 5 \sec^2 t dt$ dan $\sqrt{u^2 + 25} = 5 \sec t$.

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 25}} du \\
 &= \int \sec t dt \\
 &= \ln |\sec t + \tan t| + C \\
 &= \ln |\sqrt{u^2 + 25} + u| + K \\
 &= \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1| + K.
 \end{aligned}$$

Contoh 4

Tentukanlah $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan hasil Contoh 3, didapat

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx \\
 &= \int \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx - \int \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} dx \\
 &= \int \frac{d(x^2 + 2x + 26)}{\sqrt{x^2 + 2x + 26}} - 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1| + C \\
 &= 2\sqrt{x^2 + 2x + 26} - 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 26} + x + 1| + C.
 \end{aligned}$$

Latihan Mandiri

Tentukanlah

1 $\int x \sqrt[3]{x + \pi} \, dx$

2 $\int \frac{t^2 + 3t}{\sqrt{t + 4}} \, dt$

3 $\int_2^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \, dx$

4 $\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4t + 5}} \, dt$

5 $\int \frac{s}{\sqrt{4s - s^2}} \, ds$

6 $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI