Bab 7. Teknik Pengintegralan

7.3 Integral trigonometri

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Identitas trigonometri:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x.$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$
4. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$
5. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$
6. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
7. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Integral trigonometri jenis 1: $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$ dengan $n \in \mathbb{N}$.

Jika n adalah bilangan asli ganjil, **munculkan** faktor $\sin x$ atau $\cos x$, lalu gunakan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Contoh 1

Tentukanlah $\int \sin^3 a\, da$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 a\, da &= \int \sin a\ \sin^2 a\ da = \int \sin a\,(1-\cos^2 a)\ da \\
&= \int \sin a\ da - \int \sin a \cos^2\ da \\
&= -\cos a + \int \cos^2 a\ d(\cos a) \\
&= -\cos a + \frac{1}{3}\cos^3 a + C.
\end{aligned}$$

Jika n adalah bilangan asli genap, gunakan rumus sudut rangkap.

Contoh 2

Tentukanlah $\int \cos^2 b \; db$.

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 b \, db &= \int \frac{1+\cos 2b}{2} \, db \\
&= \frac{1}{2}\int db + \frac{1}{2}\int \cos 2b \; db \\
&= \frac{b}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2b \; d(2b) \\
&= \frac{b}{2} + \frac{\sin 2b}{4} + C.
\end{aligned}$$

Integral trigonometri jenis 2: $\int \sin^m x \, \cos^n x \, dx$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$.

Jika **salah satu** m atau n adalah bilangan asli ganjil, **munculkan** faktor $\sin x$ atau $\cos x$, lalu gunakan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Contoh 3

Tentukanlah $\int \sin^3 \alpha \, \cos^{-2} \alpha \, d\alpha$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 \alpha \, \cos^{-2} \alpha \, d\alpha &= \int \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \cos^{-2} \alpha \, d\alpha \\
&= \int \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin \alpha \; d\alpha \\
&= -\int \frac{1}{\cos^2 \alpha} d \cos \alpha + \cos \alpha + C \\
&= \sec \alpha + \cos \alpha + C.
\end{aligned}$$

Jika kedua m dan n adalah bilangan asli genap, gunakan rumus sudut rangkap.

Contoh 4

Tentukanlah $\int \sin^2\alpha\, \cos^2\alpha\, d\alpha$.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2\alpha\, \cos^2\alpha\, d\alpha &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2 2x\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx \\
&= \frac{1}{8}\int 1-\cos 4x\, dx \\
&= \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.
\end{aligned}$$

Integral trigonometri jenis 3: $\int \sin mx \, \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \, \sin nx \, dx$, $\int \cos mx \, \cos nx \, dx$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$.

Gunakan identitas trigonometri perkalian:

1. $\sin mx \, \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$.
2. $\sin mx \, \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$.
3. $\cos mx \, \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$.

Contoh 5

Tentukanlah $\int \cos 3s \, \cos s \, ds$.

$$\begin{aligned} \int \cos 3s \, \cos s \, ds &= \frac{1}{2} \int \cos 4s + \cos 2s \, ds \\ &= \frac{\sin 4s}{8} + \frac{\sin 2s}{4} + C. \end{aligned}$$

Integral trigonometri jenis 4: $\int \tan^n x\,dx$, $\int \cot^n x\,dx$ dengan $n \in \mathbb{Z}$.

Gunakan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ atau $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

Contoh 6

Tentukanlah $\int \tan^3 x\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\,dx &= \int (\sec^2 x - 1)\tan x\ dx \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin x}{\cos x}\ dx \\
&= -\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} + \int \frac{d\cos x}{\cos x}\ dx \\
&= \frac{\sec^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Integral trigonometri jenis 5: $\int \tan^m x \, \sec^n x \, dx$, $\int \cot^m x \, \csc^n x \, dx$.

Jika n adalah bilangan genap, maka gunakan $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ atau $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$.

Jika m adalah bilangan ganjil, maka gunakan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ atau $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

Contoh 7

Tentukanlah $\int \tan^3 x \, \sec^{-1/2} x \, dx$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \, \sec^{-1/2} x \, dx &= \int \tan^2 x \, \sec^{-3/2} x \, \sec x \, \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3/2} x \, d(\sec x) \\
&= \int \sec^{1/2} x \, d(\sec x) - \int \sec^{-3/2} x \, d(\sec x) \\
&= \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + 2 \sec^{-1/2} x + C.
\end{aligned}$$

Latihan Mandiri .

Tentukanlah

1. $\int \sin^4 6x \; dx$
2. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \; d\theta$
3. $\int \sin^4 \alpha \; \cos^2 \alpha \, d\alpha$
4. $\int \sin^3 2t \sqrt{\cos 2t} \; dt$
5. $\int \cot^4 x \; dx$
6. $\int \tan^{-3} x \; \sec^4 x \; dx$
7. $\int x \; \sin^3 x \; \cos x \; dx$
8. $\int \tan^3 x \; \; \sec^{-1/2} x \; dx$

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI