

Bab 7. Teknik Pengintegralan

7.2 Integral parsial

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Metode **integral parsial** (*integration by parts*) menggunakan konsep turunan hasil kali dua fungsi.

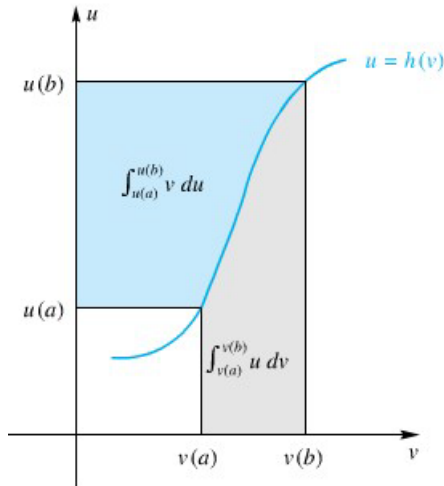
$$\begin{aligned}D_x[u(x) v(x)] &= u(x) v'(x) + v(x) u'(x) \\u(x) v'(x) &= D_x[u(x) v(x)] - v(x) u'(x)\end{aligned}$$

Dengan melakukan integral pada kedua ruas terhadap x , didapat

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

Karena $dv = v'(x) dx$ dan $du = u'(x) dx$, maka didapat integral parsial untuk integral tak-tentu.

$$\int u dv = u v - \int v du.$$



$$\int_{v(a)}^{v(b)} u \, dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_{u(a)}^{u(b)} v \, du$$

Integral parsial untuk
integral-tentu:

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Interpretasi geometri metode
integral parsial:

Luas daerah abu-abu =
Luas persegi panjang besar -
luas persegi panjang kecil -
luas daerah biru.

Contoh 1

Tentukanlah $\int x \sin x \, dx$.

Misalkan $u = x$ dan $dv = \sin x \, dx$.

Akibatnya $du = dx$ dan $v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x$.

Dengan menggunakan metode integral parsial, didapat

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukanlah $\int e^x \sin x \, dx$.

Misalkan $u = e^x$ dan $dv = \sin x \, dx$.

Akibatnya $du = e^x \, dx$ dan $v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x$.

Dengan menggunakan metode integral parsial, didapat

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \quad (1)$$

Untuk menentukan $\int e^x \cos x \, dx$, gunakan metode integral parsial.

Misalkan $u = e^x$ dan $dv = \cos x \, dx$.

Akibatnya $du = e^x \, dx$ dan $v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \quad (2)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2) ke persamaan (1), didapat

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Jadi

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

Rumus

$$\int f^n(x) g(x) dx = h(x) + \int f^k(x) g(x) dx,$$

dengan $k < n$ disebut **rumus reduksi** (*reduction formula*) karena pangkat dari f berkurang dari n menjadi k .

Rumus reduksi kadang diperoleh dari metode integral parsial.

Contoh 3

Tentukanlah rumus reduksi dari $\int \ln^\alpha x \, dx$.

Misalkan $u = \ln^\alpha x$ dan $dv = dx$.

Akibatnya $du = \frac{\alpha \ln^{\alpha-1} x}{x} dx$ dan $v = \int dv = \int dx = x$.

Rumus reduksinya adalah sebagai berikut.

$$\int \ln^\alpha x \, dx = x \ln^\alpha x - \alpha \int \ln^{\alpha-1} x \, dx.$$

Latihan Mandiri

Tentukanlah

- ➊ $\int x \sin 2x \, dx$
- ➋ $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
- ➌ $\int t \arctan t \, dt$
- ➍ $\int x 2^x \, dx$
- ➎ $\int \sin(\ln x) \, dx$
- ➏ $\int x \sinh x \, dx$
- ➐ $\int_2^3 \frac{\ln(2x^5)}{x^2} \, dx$
- ➑ $\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \csc^2 x \, dx$
- ➒ Rumus reduksi dari $\int x^\alpha e^{\beta x} \, dx$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI