

Bab 6. Fungsi Transenden

6.8 Fungsi trigonometri inversi dan turunannya

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Fungsi trigonometri dengan daerah asal alaminya **tidak** mempunyai fungsi inversi.

Jika daerah asalnya dibatasi sedemikian sehingga fungsi trigonometri monoton ketat, maka fungsi trigonometri punya fungsi inversi.

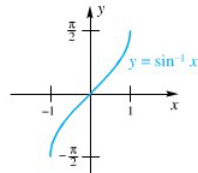
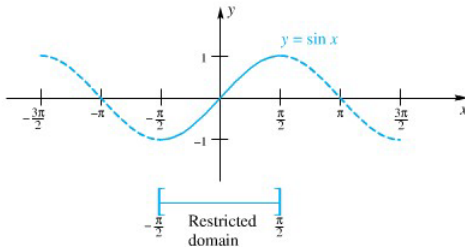


Figure 2

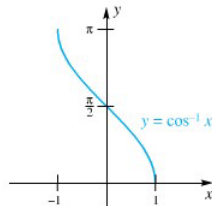
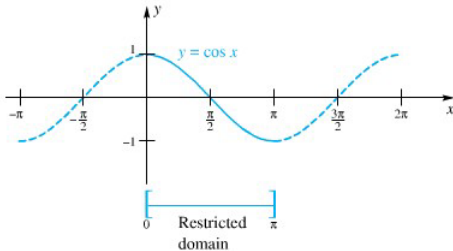


Figure 3

Definisi 1

Untuk mendapatkan **fungsi inversi** dari fungsi sinus dan cosinus, dilakukan pembatasan daerah asal fungsi.

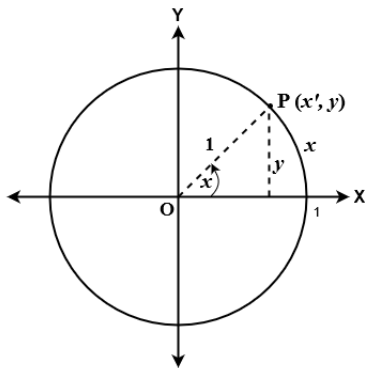
$$x = \sin^{-1} y \Leftrightarrow y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow y = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (2)$$

Contoh 2

- ❶ $\cos^{-1} 1 = 0$ karena $\cos 0 = 1$.
- ❷ $\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ karena $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- ❸ Perhatikan $\cos(2\pi) = 1$, **tapi** $\cos^{-1} 1 \neq 2\pi$, seharusnya $\cos^{-1} 1 = 0$.
- ❹ $\cos(\cos^{-1} 0, 6) = 0, 6$.
- ❺ $\sin^{-1} \left(\sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$.

$y = \sin x$ ekuivalen dengan $x = \sin^{-1} y = \arcsin y$.



Pada lingkaran tersebut, $y = \sin x$ dan $x' = \sqrt{1 - y^2}$.

Pada lingkaran satuan, $x = \arcsin y$ bermakna panjang busur (*arc*) yang nilai sinusnya y adalah x atau besar sudut yang nilai sinusnya y adalah x .

Fungsi sinus dan cosinus dan inversinya pada daerah asal yang dibatasi.

❶ $y = \sin x$

- Daerah asal: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, daerah hasil: $[-1, 1]$

❷ $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$

- Daerah asal: $[-1, 1]$, daerah hasil: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

❸ $y = \cos x$

- Daerah asal: $[0, \pi]$, daerah hasil: $[-1, 1]$

❹ $y = \cos^{-1} x = \arccos x$

- Daerah asal: $[-1, 1]$, daerah hasil: $[0, \pi]$

Catatan

$$\arcsin x = \sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x} = \csc x.$$

$$\arccos x = \cos^{-1} x \neq \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

Gambar grafik fungsi $g(x) = \sin^{-1}(x)$

Dengan GeoGebra: $g(x) = \arcsin(x)$

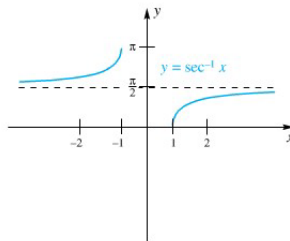
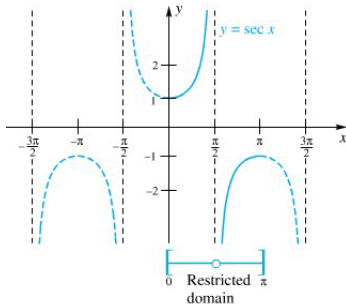
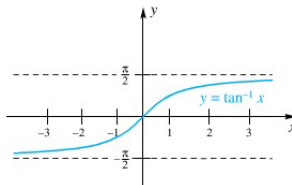
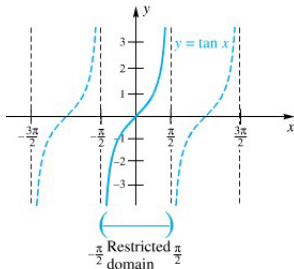
Dengan Mathematica: `Plot[ArcSin[x], {x,-1,1}]`

Catatan

*Huruf besar dan huruf kecil **dibedakan** di Mathematica.*

Latihan Mandiri.

- 1 Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1} x$.
- 2 Hitunglah $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sin^{-1} x$.
- 3 Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} \sin^{-1} x$ ada? Jelaskanlah!



Definisi 3

Untuk mendapatkan **fungsi inversi** dari fungsi tangen dan secan, dilakukan pembatasan daerah asal fungsi.

$$x = \tan^{-1} y \Leftrightarrow y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$x = \sec^{-1} y \Leftrightarrow y = \sec x, \quad 0 \leq x \leq \pi, x \neq \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Contoh 4

- ❶ $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ karena $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.
- ❷ $\tan^{-1} -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ karena $\tan -\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.
- ❸ $\sec^{-1}(-1) = \pi$ karena $\sec \pi = -1$.
- ❹ $\sec^{-1}(2) = \frac{\pi}{3}$ karena $\sec \frac{\pi}{3} = 2$.

Catatan

$$\arctan x = \tan^{-1} x \neq \frac{1}{\tan x} = \cot x.$$

$$\operatorname{arcsec} x = \sec^{-1} x \neq \frac{1}{\sec x} = \cos x.$$

Proposisi 5

$$\sec^{-1} \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right).$$

Bukti.

Misalkan $\cos x = y$, sehingga $x = \cos^{-1}(y)$.

Perhatikan $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{y}$, sehingga $x = \sec^{-1} \left(\frac{1}{y} \right)$.

Akibatnya, $\sec^{-1} \left(\frac{1}{y} \right) = \cos^{-1}(y)$.

Misalkan $\alpha = \frac{1}{y}$, maka didapat

$$\sec^{-1} \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} \right).$$

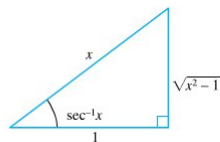
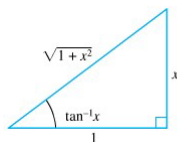
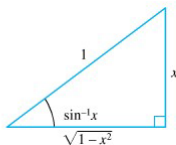
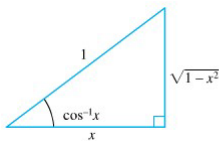


Teorema 6

- ❶ $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$
- ❷ $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}.$
- ❸ $\sec(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 + x^2}.$
- ❹

$$\tan(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{jika } x \geq 1 \\ -\sqrt{x^2 - 1} & \text{jika } x \leq -1 \end{cases}$$

Gunakanlah gambar berikut untuk mengingat identitas trigonometri di atas.



Bukti.

Bukti butir 1 sebagai berikut.

Kita punya identitas $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Untuk $0 \leq \theta \leq \pi$, didapat

$$\sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2}.$$

Misalkan $\theta = \cos^{-1} x$, sehingga

$$\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - [\cos(\cos^{-1} x)]^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$



Contoh 7

Hitunglah $\sin \left[2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right]$.

Ingat: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Perhatikan

$$\begin{aligned} \sin \left[2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] &= 2 \sin \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] \cos \left[\cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right] \\ &= 2 \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

Teorema 8 (Turunan fungsi trigonometri inversi)

$$\textcircled{1} \quad D_x \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\textcircled{2} \quad D_x \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\textcircled{3} \quad D_x \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\textcircled{4} \quad D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1$$

Contoh 9

Tentukanlah $D_x (\sec^{-1} x)^3$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Teorema Turunan Fungsi Trigonometri Inversi, didapat

$$\begin{aligned} D_x (\sec^{-1} x)^3 &= 3 (\sec^{-1} x)^2 D_x (\sec^{-1} x) \\ &= 3 (\sec^{-1} x)^2 \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{3 (\sec^{-1} x)^2}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Dari Teorema Turunan Fungsi Trigonometri Inversi, didapat anti turunan berikut.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c \quad (7)$$

Anti turunan tersebut dapat diperluas menjadi sebagai berikut.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left(\frac{|x|}{a} \right) + c \quad (10)$$

Contoh 10

Hitunglah $\int \frac{2}{\sqrt{4-9x^2}} dx$.

Perhatikan

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{\sqrt{4-9x^2}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} dx \\&= \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} d(3x) \\&= \frac{2}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + C.\end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

Tentukanlah

① $D_x \tan^{-1}(x^3)$

② $D_x (\tan^{-1} x)^3$

③ $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$

④ $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

⑤ $\int \frac{1}{2x^2+8x+25} dx$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI