

## Bab 6. Fungsi Transenden

### 6.4 Fungsi eksponensial umum dan fungsi logaritma umum

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia

## Definisi 1 (Fungsi eksponensial basis $a$ )

Untuk  $a > 0$  dan bilangan riil  $x$ , berlaku

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Perhatikan

$$\ln(a^x) = \ln(e^{x \ln a}) = x \ln a.$$

## Teorema 2 (Sifat eksponensial umum)

Jika  $a, b > 0$  dan  $x, y$  adalah bilangan riil, maka

$$\textcircled{1} \quad a^x a^y = a^{x+y},$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$\textcircled{3} \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

$$\textcircled{4} \quad (ab)^x = a^x b^x,$$

$$\textcircled{5} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Bukti.

Bukti butir ke 2.

$$\begin{aligned} \frac{a^x}{a^y} &= e^{\ln(a^x/a^y)} = e^{\ln a^x - \ln a^y} \\ &= e^{x \ln a - y \ln a} = e^{(x-y) \ln a} = a^{x-y}. \end{aligned}$$

### Teorema 3 (Aturan fungsi eksponensial umum)

$$D_x a^x = a^x \ln a, \quad (1)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ dengan } a \neq 1. \quad (2)$$

Bukti.

Perhatikan

$$D_x a^x = D_x (e^{x \ln a}) = e^{x \ln a} D_x (x \ln a) = a^x \ln a.$$

Karena  $D_x a^x = a^x \ln a$ , maka

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

### Contoh 4

Tentukanlah  $D_x 2^{\sqrt{x}}$ .

Dengan menggunakan Aturan Rantai, didapat

$$D_x 2^{\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{x}} \ln 2 D_x \sqrt{x} = \frac{2^{\sqrt{x}} \ln 2}{2 \sqrt{x}}.$$

### Contoh 5

Tentukanlah  $\int x 2^{x^2} dx$ .

Perhatikan

$$\int x 2^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2^{x^2} d(x^2) = \frac{2^{x^2}}{2 \ln 2} + C.$$

Fungsi inversi dari fungsi eksponensial basis  $a$  disebut fungsi logaritma basis  $a$ .

### Definisi 6 (Fungsi logaritma basis $a$ )

Misalkan  $a > 0$  dan  $a \neq 1$ . Maka berlaku

$$y = \log_a x \iff x = a^y.$$

Perhatikan  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .

### Teorema 7 (Aturan fungsi logaritma umum)

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x \ln a}. \quad (3)$$

## Contoh 8

Tentukanlah  $D_x \log_{10}(x^4 + 2x^2 + 3)$ .

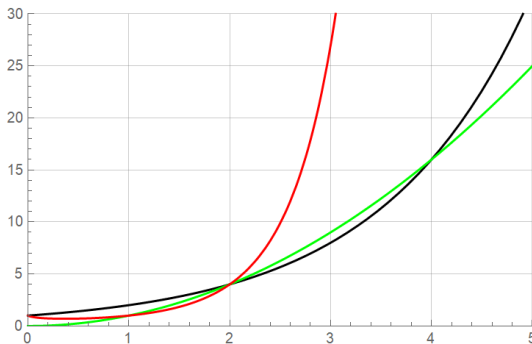
Dengan menggunakan Aturan Rantai, didapat

$$\begin{aligned} D_x \log_{10}(x^4 + 2x^2 + 3) &= \frac{1}{(x^4 + 2x^2 + 3) \ln 10} (4x^3 + 4x) \\ &= \frac{4x(x^2 + 1)}{(x^4 + 2x^2 + 3) \ln 10}. \end{aligned}$$

Misalkan  $a$  konstan.

$y = a^x$  : fungsi eksponensial basis  $a$ .

$y = x^a$  : fungsi pangkat (*power function*).



Kurva merah:

grafik  $y = x^3$ .

Kurva hijau: grafik

$y = x^2$ .

Kurva hitam: grafik

$y = 2^x$ .

Skala sumbu  $x$  dan  
sumbu  $y$  tidak

sama agar

perpotongan antar  
kurva terlihat jelas

Pada subbab 2.6 terdapat:

### Teorema 9 (Aturan pangkat)

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  adalah **bilangan bulat positif**, maka  
 $D_x x^n = n x^{n-1}$ .

Teorema di atas juga berlaku jika  $n$  adalah **bilangan bulat negatif**.

Pada subbab 2.7 terdapat:

### Teorema 10 (Aturan pangkat)

Misalkan  $r$  adalah **bilangan rasional tak-nol**. Untuk  $x > 0$ ,  
 $D_x x^r = r x^{r-1}$ .

Bagaimana jika pangkatnya adalah **bilangan irasional**?

Misalkan  $a$  adalah **bilangan irasional**.

Dengan menggunakan Aturan Rantai,

$$\begin{aligned} D_x x^a &= D_x e^{a \ln x} \\ &= e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hasil tersebut, anti turunan dari  $x^a$  adalah

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \text{ dengan } a \neq -1.$$

## Contoh 11

Tentukanlah  $D_x x^x$ , dengan  $x > 0$ .

Perhatikan

$$\begin{aligned} D_x x^x &= D_x e^{x \ln x} \\ &= e^{x \ln x} D_x (x \ln x) \\ &= x^x \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^x (1 + \ln x). \end{aligned}$$

## Latihan Mandiri.

- 1 Tentukanlah nilai  $x$  yang memenuhi  $\log_2 (x + 3) - \log_2 x = 2$ .
- 2 Tentukanlah  $D_x \log_3 e^x$ .
- 3 Tentukanlah  $D_x (10^{x^2} + (x^2)^{10})$ .
- 4 Tentukanlah  $D_x (\sin^2 x + 2^{\sin x})$ .
- 5 Tentukanlah  $\int 10^{5x-1} dx$ .
- 6 Tentukanlah  $\int_0^1 10^{3x} + 10^{-3x} dx$ .
- 7 Sketsalah  $y = 2^{-x}$ .

## Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed.,  
Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

## VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI