

Bab 6. Fungsi Transenden

6.3 Fungsi eksponensial alami

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

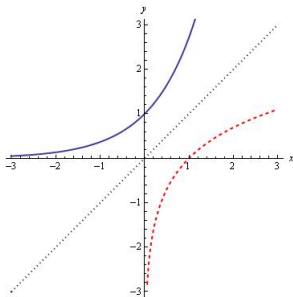
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Definisi 1

Fungsi inversi dari fungsi $\ln$ disebut **fungsi eksponensial alami** (*natural exponential function*) dan dinotasikan sebagai $\exp$.

$$x = \exp y \iff y = \ln x.$$



Grafik $y = \ln x$ (kurva merah), $y = x$ (garis hitam putus-putus),
 $y = \exp x$ (kurva biru).

Definisi 2

Huruf e menyatakan bilangan riil positif yang unik sedemikian sehingga $\ln e = 1$.

$$e \approx 2,718281828459045$$

Perhatikan

$$e^{\ln x} = x, \text{ dengan } x > 0 \quad (1)$$

$$\ln(e^y) = y, \text{ untuk setiap } y. \quad (2)$$

Teorema 3

Misalkan a dan b adalah bilangan riil.

$$e^a e^b = e^{a+b} \text{ dan } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

Bukti.

Bukti sifat pertama sebagai berikut.

$$\begin{aligned} e^a e^b &= \exp(\ln(e^a e^b)) \\ &= \exp(\ln e^a + \ln e^b) \\ &= \exp(a + b) \\ &= e^{a+b}. \end{aligned}$$



Turunan fungsi eksponensial alami $y = e^x$.

Tulis $y = e^x$ sebagai $x = \ln y$.

Turunkan $x = \ln y$ terhadap x dengan menggunakan Aturan Rantai, sehingga $1 = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = y$.

Jadi

$$D_x e^x = e^x$$

Catatan

Turunan fungsi eksponensial alami adalah dirinya sendiri.

Contoh 4

Tentukanlah $D_x e^{x^2 \ln x}$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai, didapat

$$\begin{aligned} D_x e^{x^2 \ln x} &= e^{x^2 \ln x} D_x(x^2 \ln x) \\ &= e^{x^2 \ln x} \left(x^2 \frac{1}{x} + 2x \ln x \right) \\ &= x e^{x^2 \ln x} (1 + \ln x^2). \end{aligned}$$

Integral fungsi eksponensial alami $y = e^x$.

Karena $D_x e^x = e^x$, maka

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Contoh 5

Tentukanlah $\int e^{-2x} dx$.

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C.$$

Latihan mandiri

- 1 Buktikanlah $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- 2 Tentukanlah $D_x x^3 e^x$.
- 3 Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari $e^{xy} + xy = 2$.
- 4 Tentukanlah $\int e^{x+e^x} dx$.
- 5 Tentukanlah $\int x e^{x^2-3} dx$.
- 6 Suatu daerah dibatasi oleh kurva $y = e^{-x^2}$, sumbu x , sumbu y dan garis vertikal $x = 1$. Daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu y . Tentukanlah volume benda putar yang terbentuk!

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed.,
Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI