

Bab 6. Fungsi Transenden

6.2 Fungsi inversi dan turunannya

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

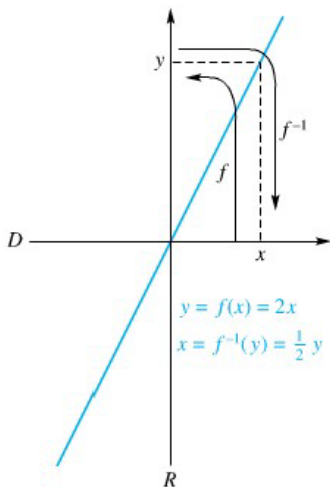
Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia



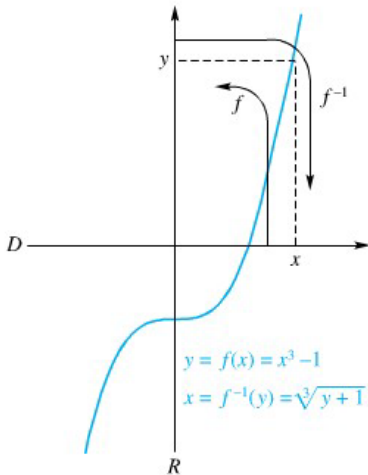
Diberikan fungsi $f : D \rightarrow R$ dengan grafik fungsi f seperti di samping.

$x \in D$ dipetakan oleh f ke $y \in R$.

Aturan fungsi f dapat **dibalik**, sehingga $y \in R$ dapat dipetakan kembali ke $x \in D$ tanpa keraguan.

Hal ini menghasilkan fungsi baru yang disebut **fungsi inversi** dari f . Fungsi baru tersebut dinotasikan sebagai f^{-1} .

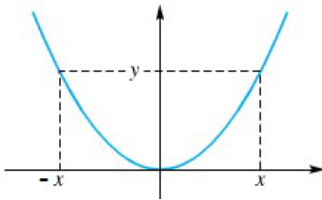
Perhatikan f^{-1} **tidak** bermakna $1/f$.



Fungsi f di samping juga memiliki fungsi inversi f^{-1} .

Fungsi parabola f dengan grafiknya seperti di samping.

x dipetakan oleh f ke y .
Demikian pula, $-x$ dipetakan oleh f ke y .



Aturan fungsi f **tidak** dapat dibalik, karena ada keraguan. y akan dipetakan kembali ke $-x$ atau ke x ?

Jadi fungsi f tersebut **tidak** punya fungsi inversi.

Syarat cukup fungsi punya inversi.

Teorema 1

Jika fungsi f monoton ketat (strictly monotonic) di daerah asalnya, maka fungsi f punya inversi.

Catatan

Jenis monoton ketat:

- ❶ $f'(x) > 0$ (fungsi naik) atau
- ❷ $f'(x) < 0$ (fungsi turun)

di setiap titik-dalam (interior point) di daerah asal fungsinya.

Contoh 2

Apakah fungsi f , dengan $f(x) = x^5 + 3x^3 + 1$, punya fungsi inversi?

Perhatikan $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 > 0$ untuk setiap x , sehingga f adalah fungsi monoton ketat. Berdasarkan Teorema 1, fungsi f mempunyai fungsi inversi.

Contoh 3

Apakah fungsi g , dengan $g(x) = 2x + 6$ punya fungsi inversi? Jika iya, tentukanlah rumus fungsi inversi $f^{-1}(y)$ tersebut.

Karena $g'(x) = 2 > 0$ untuk setiap x , maka berdasarkan Teorema 1 fungsi g punya fungsi inversi.

Tulis $y = 2x + 6$ menjadi $x = \frac{y-6}{2}$. Jadi $g^{-1}(y) = \frac{y-6}{2}$

Misalkan fungsi f tidak mempunyai inversi.

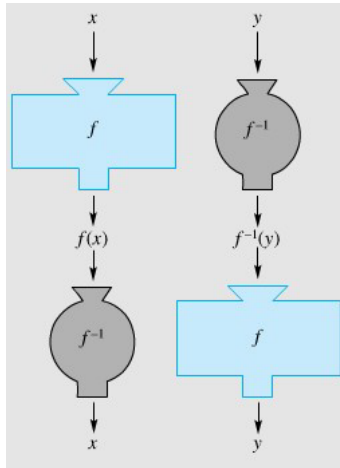
Jika daerah asal fungsi f **dibatasi** (*restricted*), sedemikian sehingga fungsi f monoton ketat di daerah asal yang dibatasi tersebut, maka fungsi f mempunyai inversi di daerah asal yang dibatasi tersebut.

Contoh 4

Fungsi f , dengan $f(x) = x^2$, mempunyai fungsi inversi jika daerah asal fungsi f dibatasi di $[0, \infty)$. Hal ini dikarenakan $f'(x) = 2x > 0$ untuk setiap $x \in [0, \infty)$.

Jika fungsi f mempunyai fungsi inversi f^{-1} , maka fungsi f^{-1} mempunyai fungsi inversi f . Perhatikan

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ dan } f(f^{-1}(y)) = y.$$



Grafik $y = f^{-1}(x)$.

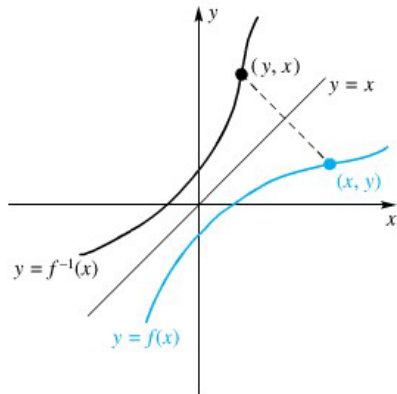
Misalkan fungsi f mempunyai fungsi inversinya, maka

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Akibatnya grafik $f(x)$ sama dengan grafik $f^{-1}(y)$.

Namun, biasanya variabel x digunakan sebagai variabel daerah asal. Jika ini diterapkan pada $x = f^{-1}(y)$, sehingga $y = f^{-1}(x)$, bagaimana grafik $y = f^{-1}(x)$?

Ternyata grafik $y = f^{-1}(x)$ merupakan **pencerminan** dari grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$



Misalkan fungsi f mempunyai fungsi inversi. Bagaimana menentukan rumus untuk $f^{-1}(x)$?

- 1 Selesaikan persamaan $y = f(x)$ untuk x dalam variabel y .
- 2 Gunakan $f^{-1}(y)$ untuk menamai ekspresi hasilnya dalam y tersebut.
- 3 Ganti y dengan x untuk mendapatkan rumus $f^{-1}(x)$.

Contoh 5

Tentukanlah rumus untuk $f^{-1}(x)$ jika $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Langkah 1:

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = -y-1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y+1}{y-1}$$

Langkah 2:

$$\text{Tulis } f^{-1}(y) = -\frac{y+1}{y-1}.$$

Langkah 3:

$$\text{Tulis } f^{-1}(x) = -\frac{x+1}{x-1}.$$

Teorema 6 (Teorema fungsi inversi)

Misalkan fungsi f terturunkan dan monoton ketat pada interval I .
Jika $f'(x) \neq 0$ di suatu x di I , maka fungsi f^{-1} terturunkan di titik yang bersesuaian $y = f(x)$ dalam range fungsi f dan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

atau dengan penulisan lain

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Contoh 7

Misalkan $y = f(x) = x^5 + 2x + 1$. Hitunglah $(f^{-1})'(4)$.

Fungsi f terturunkan karena f adalah fungsi polinomial. Lebih lanjut, fungsi f monoton ketat karena $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$ untuk setiap x .

Perhatikan $y = 4$ berkorespondensi dengan $x = 1$.

Karena $f'(1) = 7$, maka berdasarkan Teorema Fungsi Inversi

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}.$$

Latihan mandiri.

- ➊ Apakah fungsi f , dengan $f(x) = \int_x^1 \cos^4 t \, dt$, monoton ketat? Jelaskanlah!
- ➋ Tentukanlah $f^{-1}(x)$ dari $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^3 + 1}$.
- ➌ Jika $f(x) = \sqrt{x+1}$, hitunglah $(f^{-1})'(2)$.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed.,
Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI