

Bab 6. Fungsi Transenden

6.1 Fungsi logaritma alami

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

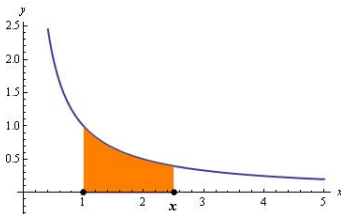
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Definisi 1

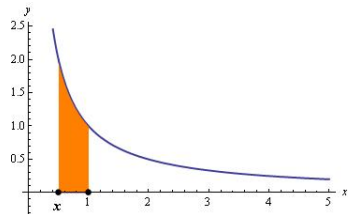
Fungsi logaritma alami (*natural logarithm function*), dinotasikan sebagai $\ln$, didefinisikan sebagai

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ dengan } x > 0.$$

Domain alami: $D_{\ln} = (0, \infty)$.



Jika $x > 1$, maka $\ln x =$ luas daerah coklat.



Jika $x < 1$, maka $\ln x = -$ luas daerah coklat.

Diketahui fungsi logaritma alami

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ dengan } x > 0.$$

Turunan fungsi logaritma alami

$$D_x \ln x = D_x \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}, \text{ dengan } x > 0.$$

Turunan fungsi logaritma alami diperoleh dengan menggunakan Teorema Dasar I Kalkulus.

Contoh 2

Tentukanlah $D_x \ln(x^2 + 2)$.

Perhatikan $x^2 + 2 > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan Aturan Rantai,

$$D_x \ln(x^2 + 2) = \frac{1}{x^2 + 2} (2x) = \frac{2x}{x^2 + 2}.$$

Contoh 3

Buktikanlah

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}, \text{ dengan } x \neq 0.$$

Pembuktian dibagi dalam 2 kasus.

Kasus I: $x > 0$.

Untuk $x > 0$, $D_x \ln |x| = D_x \ln x = \frac{1}{x}$.

Kasus II: $x < 0$.

Untuk $x < 0$, $D_x \ln |x| = D_x \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Jadi $D_x \ln |x| = \frac{1}{x}$, untuk $x \neq 0$.

Karena

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}, \text{ dengan } x \neq 0,$$

maka **anti turunan** dari $\frac{1}{x}$ adalah

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \text{ dengan } x \neq 0.$$

Contoh 4

Tentukanlah $\int \frac{x^2-x}{x+1} dx$.

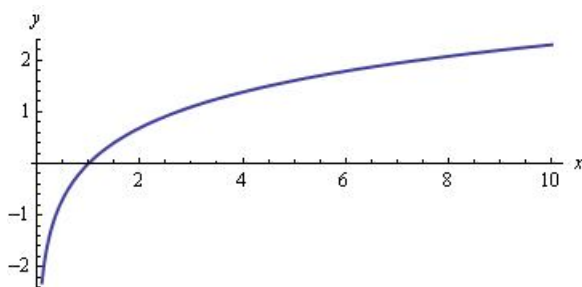
Perhatikan $\frac{x^2-x}{x+1} = x - 2 + \frac{2}{x+1}$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-x}{x+1} dx &= \int x - 2 dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln |x+1| + C.\end{aligned}$$

Teorema 5

Jika a dan b adalah bilangan positif dan r adalah bilangan rasional, maka

- ❶ $\ln 1 = 0$,
- ❷ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$,
- ❸ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$,
- ❹ $\ln a^r = r \ln a$.

Grafik fungsi $\ln$.

Perhatikan:

- ➊ $\ln 1 = 0$.
- ➋ Untuk $x > 0$, $D_x \ln x = \frac{1}{x} > 0$. Akibatnya fungsi $\ln$ adalah fungsi naik untuk $x > 0$.
- ➌ Untuk $x > 0$, $D_x^2 \ln x = -\frac{1}{x^2} < 0$. Akibatnya fungsi $\ln$ cekung ke bawah untuk $x > 0$.
- ➍ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Latihan mandiri

- 1 Tentukanlah $D_x \ln(3x^3 + 2)$
- 2 Tentukanlah $D_x x^2 \ln x^2 + (\ln x)^2$
- 3 Tentukanlah $\int \frac{2 \ln x}{x} dx$
- 4 Tentukanlah $\int \frac{x^3 + x^2}{x + 2} dx$
- 5 Sketsalah $y = \ln \sqrt{x}$
- 6 Sketsalah $y = \ln(x - 2)$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI