

Bab 5. Aplikasi Integral

5.3 Volume benda padat putar: metode kulit tabung

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

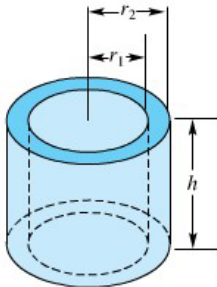
Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Cara lain untuk menghitung volume benda putar:
metode kulit tabung (*cylindrical shell*).



Kulit tabung adalah benda padat yang dibatasi oleh dua tabung tegak yang **konsentrik** (*consentric*), yaitu punya sumbu pusat yang sama.

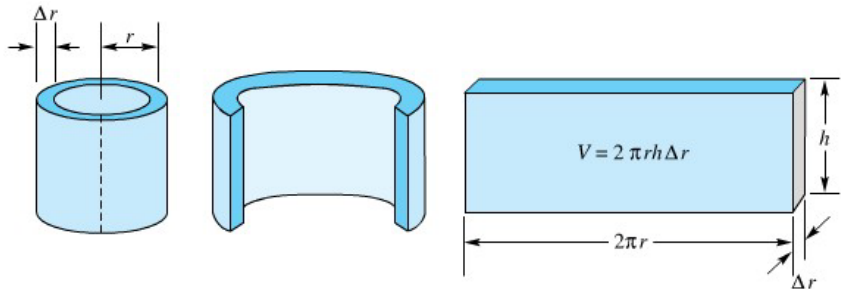
Volume kulit tabung di samping:

$$\begin{aligned}
 V &= \text{luas alas} \cdot \text{tinggi} \\
 &= \pi (r_2^2 - r_1^2) h \\
 &= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) h \\
 &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h (r_2 - r_1).
 \end{aligned}$$

Jika kulit tabungnya **sangat tipis** ($r_1 \approx r_2$), maka volume kulit tabung dapat diaproksimasi oleh $V \approx 2\pi r h \Delta r$.

Volume kulit tabung yang **sangat tipis** dapat diaproksimasi oleh volume balok, yaitu $V \approx 2\pi r h \Delta r$.

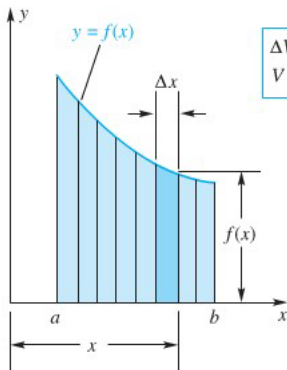
Rumus ini mempunyai **makna geometris** seperti berikut.



$2\pi r$: keliling lingkaran alas kulit tabung (panjang balok),

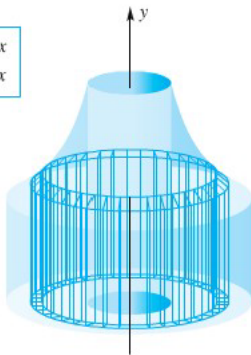
h : tinggi kulit tabung (tinggi balok),

Δr : tebal kulit tabung (lebar balok).



$$\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$



- 1 **Iris** daerah secara vertikal. Ambil 1 setrip vertikal, lalu putar mengelilingi **sumbu y** , sehingga didapat satu kulit tabung.
- 2 **Aproksimasi** volume kulit tabung dengan volume balok:
 $\Delta V \approx 2\pi x f(x) \Delta x$.
- 3 **Integralkan**: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.

Catatan

- 1 Pada metode cakram dan metode cincin, setrip yang digunakan **tegak lurus** dengan sumbu putar.
- 2 Pada metode kulit tabung, setrip yang digunakan **sejajar** dengan sumbu putar.

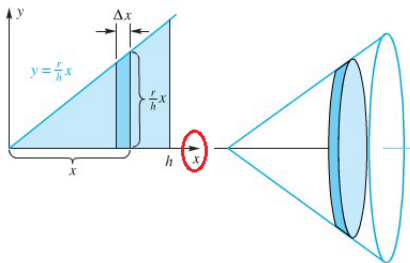
Contoh 1

Diberikan daerah segitiga yang dibatasi oleh garis miring $y = \frac{rx}{h}$, sumbu x dan garis vertikal $x = h$.

Kemudian daerah ini diputar mengelilingi **sumbu x** .

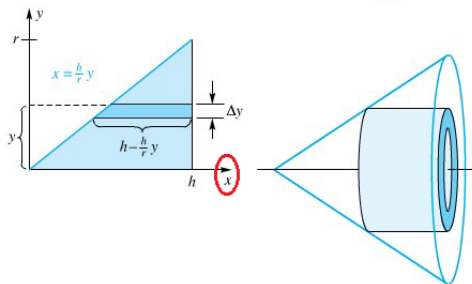
Hitunglah volume benda putar yang terbentuk dengan metode cakram dan metode kulit tabung!

Daerah segitiga yang diputar mengelilingi sumbu x ini menghasilkan kerucut padat.



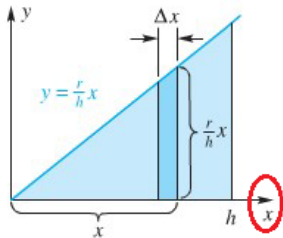
Metode cakram :

- ❶ setrip tegak lurus dengan sumbu x .
- ❷ variabel bebas: x .



Metode kulit tabung :

- ❶ setrip sejajar dengan sumbu x .
- ❷ variabel bebas: y .
- ❸ Nyatakan $y = \frac{rx}{h}$ sebagai $x = \frac{hy}{r}$.



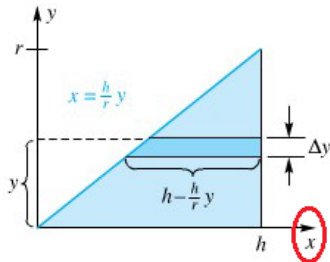
Metode cakram :

Aproksimasi volume setrip putar:

$$\Delta V \approx \pi \left(\frac{rx}{h} \right)^2 \Delta x.$$

Integralkan terhadap variabel x :

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h} \right)^2 dx = \dots = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$



Metode kulit tabung :

Aproksimasi volume kulit tabung:

$$\Delta V \approx 2\pi y \left(h - \frac{hy}{r} \right) \Delta y.$$

Integralkan terhadap variabel y :

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^r y \left(h - \frac{hy}{r} \right) dy = \\ &\dots = \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$

Latihan mandiri.

Diberikan daerah yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$, garis horizontal $y = 2$ dan sumbu y . Daerah tersebut diputar mengelilingi garis $y = 2$.

Hitunglah volume benda putar yang terbentuk dengan menggunakan metode kulit tabung!

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI