FMIPA

Bab 5. Aplikasi Integral

5.2 Volume benda padat: metode cincin

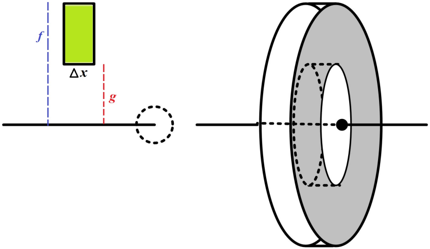
Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Metode cincin (*washers*): selisih volume cakram besar dengan cakram kecil.

Daerah tertutup yang diputar mempunyai jarak dengan sumbu putarnya, sehingga hasil putarnya menghasilkan lubang di tengah (cakram berlubang atau serupa dengan cincin).



Volume cincin: $V = \pi\, f^2\, \triangle x - \pi\, g^2\, \triangle x = \pi\, (f^2 - g^2)\, \triangle x.$

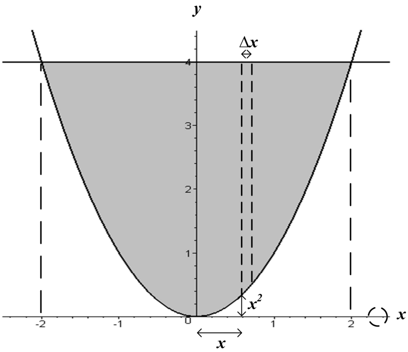
Catatan

Pada metode cincin, sumbu putar tegak lurus dengan daerah persegi panjang yang diputar.

FMIPA

Contoh 1

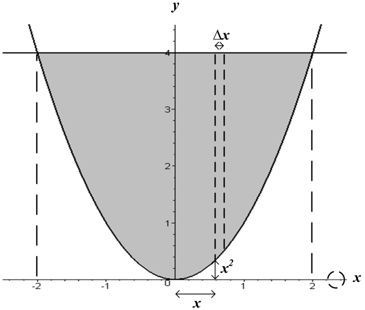
Misalkan D adalah daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis horizontal $y = 4$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah D diputar mengelilingi sumbu x.



Titik potong antara parabola dan garis adalah (-2, 4) dan (2, 4).

Terhadap sumbu putar (sumbu x):

1. Jari-jari cakram besar: 4.
2. Jari-jari cakram kecil: x^2.



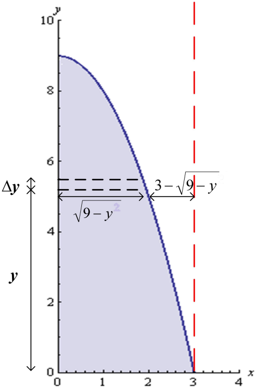
Prosedur penyelesaian:

1. Iris daerah D secara vertikal. Ambil satu setrip vertikal, dan putar mengelilingi sumbu x.
2. Aproksimasi volume setrip putar tersebut sebagai volume cincin, sehingga volume cincinnya: $\triangle V \approx \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]\triangle x$.
3. Integralkan volume setrip putar: $V = \pi\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx$.

$$\begin{aligned}\triangle V &\approx \pi\left[4^2 - (x^2)^2\right]\triangle x\\ V &= \pi\int_{-2}^{2} 16 - x^4\,dx = \cdots = 51\frac{1}{5}\pi.\end{aligned}$$

Contoh 2

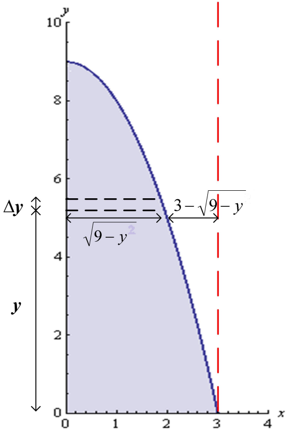
Misalkan D adalah daerah yang terletak di kuadran I dan dibatasi kurva $y = 9 - x^2$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah D diputar mengelilingi sumbu vertikal $x = 3$.



Karena daerah D diputar mengelilingi sumbu vertikal $x = 3$, maka sumbu tersebut tegak lurus dengan setripnya. Selain itu, nyatakan $y = 9 - x^2$ sebagai $x = \sqrt{9-y}$.

Terhadap sumbu vertikal $x = 3$,

1. Jari-jari cakram besar: 3.
2. Jari-cari cakram kecil: $3 - \sqrt{9-y}$



1. Iris daerah D secara horizontal. Ambil satu setrip horizontal, dan putar mengelilingi sumbu putar $x = 3$.
2. Aproksimasi volume setrip putar tersebut sebagai volume cincin: $\triangle V \approx \pi \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] \triangle y$.
3. Integralkan volume setrip putar: $V = \pi \int_a^b \left[(f(y))^2 - (g(y))^2\right] dy$.

$$\begin{aligned} \triangle V &\approx \pi\,[3^2 - (3 - \sqrt{9-y})^2]\,\triangle y \\ V &= \pi \int_0^9 y - 9 + 6\sqrt{9-y}\,dy = \cdots = 67\frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

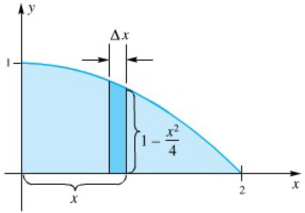
Benda padat dengan penampang melintang lainnya.

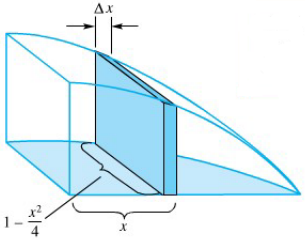
Metode cakram dan metode cincin digunakan untuk mencari volume benda padat yang penampang melintangnya berkaitan dengan daerah lingkaran.

Bagaimana mencari volume benda padat jika penampang melintangnya tidak merupakan daerah lingkaran? Gunakan metode lempeng tipis.

Contoh 3

Misalkan alas suatu benda padat terletak di kuadran I yang dibatasi kurva $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu x dan sumbu y. Misalkan penampang melintang yang tegak lurus dengan sumbu x merupakan daerah persegi. Hitunglah volume benda padatnya!





Volume lempeng tipis: $\triangle V \approx \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \triangle x.$

Volume benda padat: $V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \cdots = 1\frac{1}{15}.$

Latihan mandiri

1. Suatu daerah di kuadran I dibatasi oleh kurva $y = \frac{1}{x}$, garis vertikal $x = 2$ dan $x = 4$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah tersebut diputar mengelilingi garis mendatar $y = 1$.
2. Suatu piramida mempunyai tinggi sebesar t dan alas berupa daerah persegi dengan panjang satu sisi perseginya adalah a. Tentukanlah volume piramida tersebut!

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI