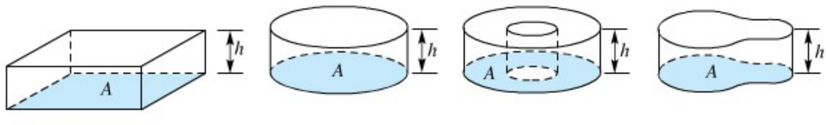
Bab 5. Aplikasi Integral

5.2 Volume benda padat: metode lempeng dan metode cakram

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

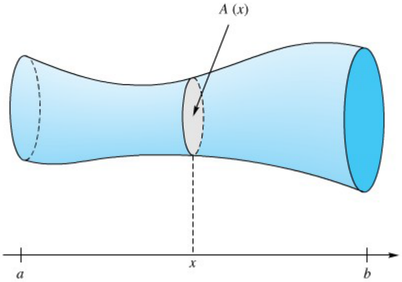


Secara umum, volume benda padat (*solid*) dicari dengan

$$V = A \cdot h,$$

dengan A adalah luas alas benda padat dan h adalah tinggi benda padat.

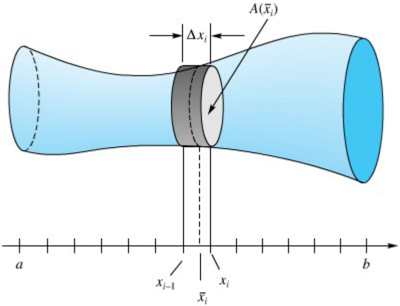
Metode lempeng tipis (*thin slab*).



Misalkan benda padat di atas mempunyai penampang melintang (*cross section*) yang tegak lurus sumbu x.

Diketahui $A(x)$: luas penampang melintang di titik x, dengan $a \leq x \leq b$.

Partisi interval $[a, b]$ menjadi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.



Volume lempeng tipis dapat diaproksimasi dengan volume cakram, yaitu:

$$\triangle V_i \approx A(\bar{x}_i)\,\triangle x_i,$$

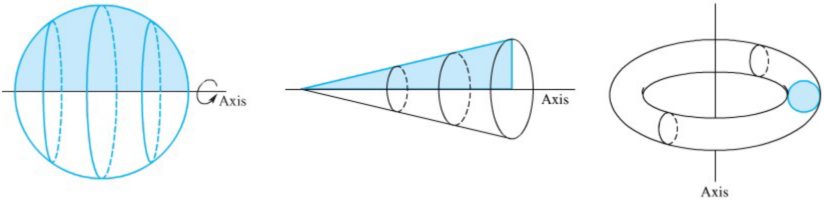
dengan luas alas cakram $A(\bar{x}_i)$ dan tinggi cakram $\triangle x_i$.

Dengan menggunakan jumlahan Riemann dan norm partisi menuju 0, volume benda padat yang dicari adalah

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

FMIPA

Benda putar (*solid of revolution*) adalah benda padat yang terbentuk akibat suatu daerah tertutup diputar mengelilingi suatu garis yang berfungsi sebagai sumbu (*axis*).

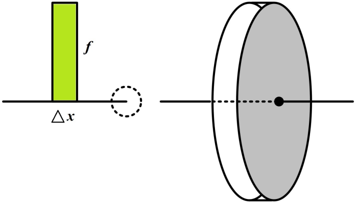


1. Daerah setengah lingkaran diputar mengelilingi sumbu horizontal menghasilkan bola padat.
2. Derah segitiga diputar mengelilingi sumbu horizontal menghasilkan kerucut padat.
3. Derah lingkaran diputar mengelilingi sumbu vertikal (ada jarak antara kedua objek) menghasilkan torus.

Metode cakram (*disk*).

Volume benda putar dapat diaproksimasi dengan penjumlahan volume sejumlah cakram.

Cakram tersebut merupakan hasil rotasi persegi panjang terhadap suatu sumbu.



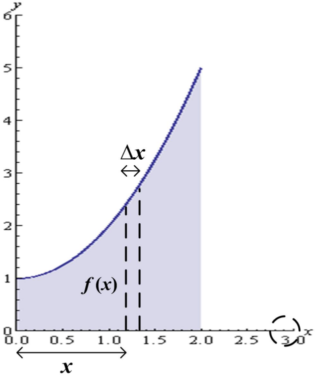
Volume cakram: $V = \pi\, f^2\, \triangle x$.

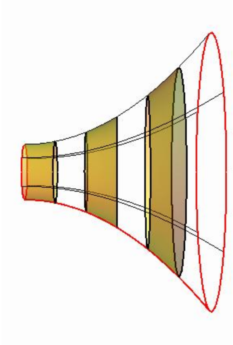
Catatan

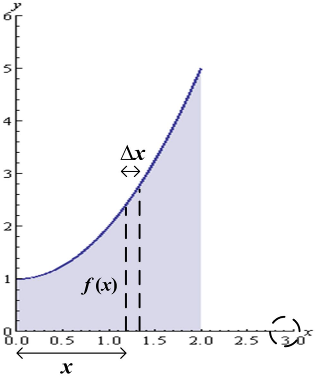
Pada metode cakram, sumbu putar tegak lurus dengan daerah persegi panjang yang diputar.

Contoh 1

Misalkan D adalah daerah di kuadran I yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$ dan garis $x = 2$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah D diputar mengelilingi sumbu x.







Prosedur penyelesaian:

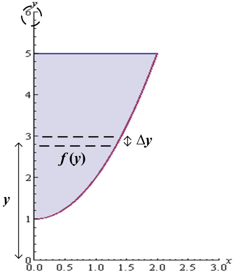
1. Iris daerah D secara vertikal. Ambil satu setrip vertikal, dan putar mengelilingi sumbu x.
2. Aproksimasi volume setrip putar tersebut sebagai volume cakram, sehingga volume setrip putar tersebut: $\triangle V \approx \pi\,(f(x))^2\,\triangle x$.
3. Integralkan volume setrip putar: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

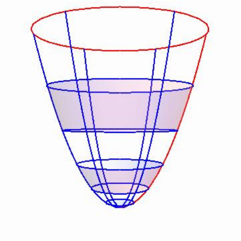
$$\begin{aligned}\triangle V &\approx \pi\,(x^2+1)^2\triangle x\\ V &= \pi\int_0^2 (x^2+1)^2\,dx = \cdots = 13\frac{11}{15}\pi.\end{aligned}$$

Jadi volume benda putarnya adalah $13\frac{11}{15}\pi$ satuan volume.

Contoh 2

Misalkan D adalah daerah di kuadran I yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$ dan garis $y = 5$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah D diputar mengelilingi sumbu y.

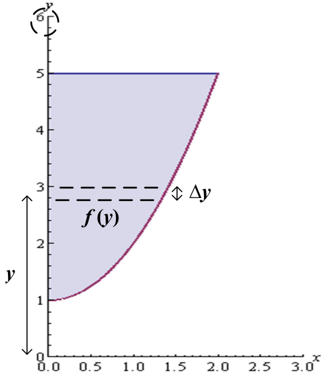




Karena sumbu putarnya adalah sumbu y, maka setripnya tegak lurus dengan sumbu y.

Selain itu, nyatakan $y = x^2 + 1$ sebagai $x = f(y) = \sqrt{y-1}$.

FMIPA



Prosedur penyelesaian:

1. Iris daerah D secara horizontal. Ambil satu setrip horizontal, dan putar mengelilingi sumbu y.
2. Aproksimasi volume setrip putar tersebut sebagai volume cakram, sehingga volume setrip putar tersebut: $\triangle V \approx \pi\,(f(y))^2\,\triangle y$.
3. Integralkan volume setrip putar: $V = \pi \int_a^b (f(y))^2\,dy$.

$$\begin{aligned} \triangle V &\approx \pi\,(\sqrt{y-1})^2 \triangle y \\ V &= \pi \int_1^5 y - 1\,dy = \cdots = 8\pi. \end{aligned}$$

Jadi volume benda putarnya adalah 8π satuan volume.

Latihan mandiri

Suatu daerah di kuadran I dibatasi oleh kurva parabola $y = 3 - x^2$. Hitunglah volume benda putar yang terbentuk jika daerah tersebut diputar mengelilingi

1. sumbu x,
2. sumbu y.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI