Bab 5. Aplikasi Integral

5.1 Luas daerah bidang

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Integral tentu (*definite integral*) dapat digunakan untuk menghitung luas daerah.

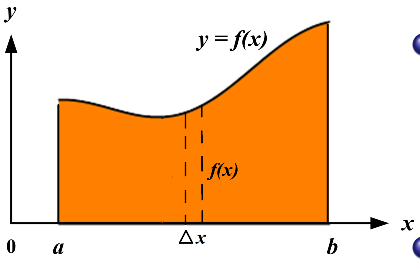
Langkah umum mencari luas daerah dengan integral tentu:

1. Sketsalah daerah yang diberikan.
2. **Iris** daerah yang diberikan, sehingga didapat setrip-setrip.
3. **Aproksimasi** luas setrip dengan luas persegi panjang.
4. **Integralkan** hasil aproksimasi.

Catatan

- *Luas daerah selalu bernilai positif.*
- *Dalam melakukan butir 4 di atas, sebenarnya dilakukan penjumlahan hasil aproksimasi, lalu kenakan limit ketika lebar setrip mendekati 0 pada jumlahan tersebut, sehingga didapat integral tentu.*

Diberikan fungsi f, dengan $y = f(x)$.



Tentukanlah luas daerah yang dibatasi sumbu x, garis vertikal $x = a$, $x = b$ dan kurva f!

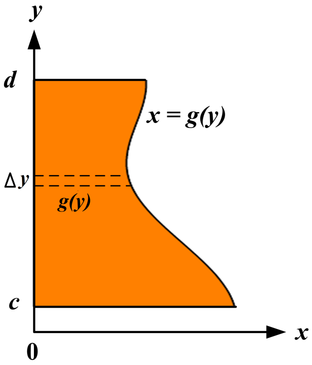
1. **Iris** daerah yang diberikan secara vertikal, sehingga didapat setrip vertikal.
2. **Aproksimasi** luas setrip vertikal itu dengan luas persegi panjang:

$$\triangle L \approx f(x)\,\triangle x.$$

3. **Integralkan** hasil aproksimasi:

$$L = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Diberikan fungsi g, dengan $x = g(y)$.



Tentukanlah luas daerah yang dibatasi sumbu y, garis horizontal $y = c$, $y = d$ dan kurva g!

1. Iris daerah yang diberikan secara horizontal, sehingga didapat setrip horizontal.
2. Aproksimasi luas setrip horizontal dengan luas persegi panjang:

$$\triangle L \approx g(y)\,\triangle y.$$

3. Integralkan hasil aproksimasi:

$$L = \int_c^d g(y)\,dy.$$

Contoh 1

Hitunglah luar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu x, garis vertikal $x = -1$ dan $x = 1$.

1. Iris daerahnya secara vertikal.
2. Karena setrip vertikalnya ada yang di bawah dan di atas sumbu x, maka aproksimasi luas setripnya menjadi $\triangle L \approx -x^3 \triangle x$, untuk $x \in [-1, 0]$ dan

   $\triangle L \approx x^3 \triangle x$, untuk $x \in [0, 1]$.

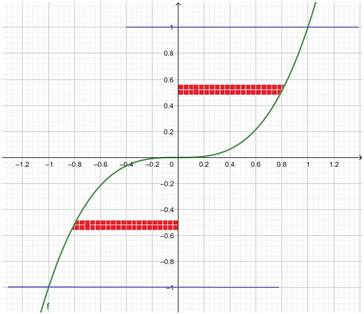
Langkah selanjutnya, integralkan hasil aproksimasi:

$$\begin{aligned} L &= -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx \\ &= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} \\ &= -\left(0 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jadi luas daerah yang dicari adalah $\frac{1}{2}$ satuan luas.

Contoh 2

Hitunglah luar daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y, garis horizontal $y = -1$ dan $y = 1$.



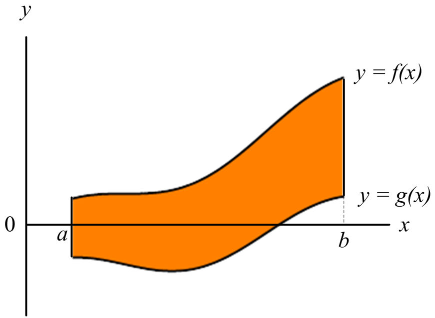
1. Iris daerahnya secara horizontal (variabel bebas: y).
   Tulis $y = x^3$ menjadi $x = \sqrt[3]{y}$.
2. Karena setrip horizontalnya ada yang di kiri dan di kanan sumbu y, maka aproksimasi luas setripnya menjadi
   $\triangle L \approx -\sqrt[3]{y}\,\triangle y$, untuk $y \in [-1, 0]$ dan
   $\triangle L \approx \sqrt[3]{y}\,\triangle y$, untuk $y \in [0, 1]$.

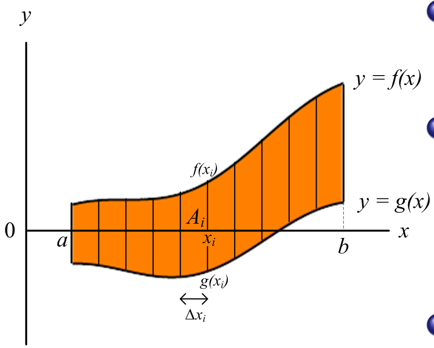
Langkah selanjutnya, integralkan hasil aproksimasi:

$$\begin{aligned} L &= -\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{y}\, dy + \int_{0}^{1} \sqrt[3]{y}\, dy \\ &= -\frac{3}{4} y \sqrt[3]{y}\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{4} y \sqrt[3]{y}\Big|_{0}^{1} \\ &= -\frac{3}{4}(0-1) + \frac{3}{4}(1-0) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Jadi luas daerah yang dicari adalah $\frac{3}{2}$ satuan luas.

Bagaimana mencari luas daerah datar yang dibatasi fungsi f dan fungsi g berikut?



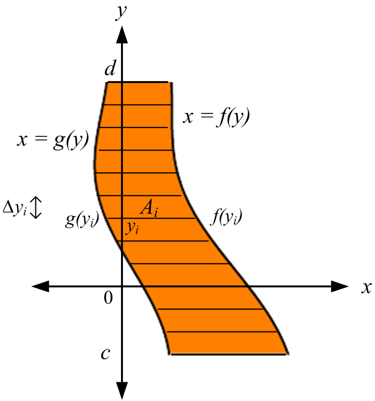


Langkah pembentukan integral luas:

1. Iris daerah yang dicari secara vertikal, didapat setrip vertikal.
2. Aproksimasi luas setrip vertikal dengan luas persegi panjang, yaitu: $\triangle A_i \approx (f(x_i) - g(x_i)) \triangle x_i$.
3. Integralkan hasil aproksimasi luas, yaitu: $L = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$.

Catatan

Kedua ujung setrip vertikal harus menyentuh kurva f (di atas) dan kurva g (di bawah) sekaligus.



Langkah pembentukan integral luas:

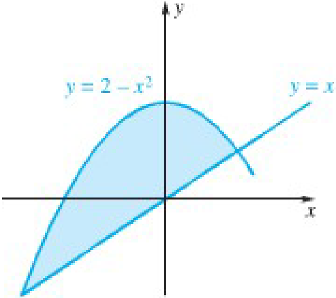
1. **Iris** daerah yang dicari secara horizontal, didapat setrip horizontal.
2. **Aproksimasi** luas setrip horizontal dengan luas panjang, yaitu:
   $\triangle A_i \approx (f(y_i) - g(y_i)) \triangle y_i$.
3. **Integralkan** hasil aproksimasi luas, yaitu:
   $L = \int_c^d f(y) - g(y)\, dy$.

Catatan

*Kedua ujung **setrip horizontal** harus memotong kurva f (di kanan) dan kurva g (di kiri) sekaligus.*

Contoh 3

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva parabola $y = 2 - x^2$ dan garis $y = x$.

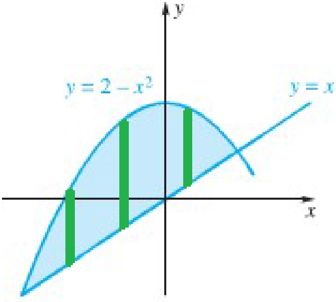


Pertama-tama, kita cari titik potong antara kurva parabola dan garis.

$$2 - x^2 = x$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0.$$

Untuk $x = -2$, didapat $y = -2$.
Untuk $x = 1$, didapat $y = 1$.

Jadi titik potongnya adalah $(-2, -2)$ dan $(1, 1)$.



1. Iris daerahnya secara vertikal, didapat setrip vertikal.
2. Aproksimasi luas setrip vertikalnya dengan luas persegi panjang, yaitu: $\triangle L \approx (2 - x^2 - x)\,\triangle x$.
3. Integralkan hasil aproksimasi:
$L = \int_{-2}^{1} 2 - x^2 - x\,dx$
$= 2\,x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}$
$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right)$
$= 4\frac{1}{2}$.

Jadi luas daerah yang dicari adalah $4\frac{1}{2}$ satuan luas.

Latihan mandiri.

1. Kerjakanlah Contoh 1 dengan menggunakan setrip horizontal! Catatan: luas daerah yang dihasilkan tetap sama.
2. Kerjakanlah Contoh 2 dengan menggunakan setrip vertikal! Catatan: luas daerah yang dihasilkan tetap sama.
3. Kerjakanlah Contoh 3 dengan menggunakan setrip horizontal! Petunjuk: aproksimasi luas perlu dibagi menjadi 2 bagian. Catatan: luas daerah yang dihasilkan tetap sama.
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 6$, kurva $y = x^3$ dan garis $2y + x = 0$.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI