

Integral-tentu

4.5 Teorema nilai rata-rata untuk integral dan sifat simetri

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Definisi 1 (Nilai rata-rata fungsi (*average value of a function*))

Jika fungsi f terintegralkan di interval tutup $[a, b]$, maka nilai rata-rata dari fungsi f di $[a, b]$ adalah

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Contoh 2

Nilai rata-rata fungsi $\sin x$ di $[0, \pi]$ adalah

$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

Contoh 3

Misalkan suhu (dalam derajat Celcius) suatu batang besi dengan panjang 2 m bergantung pada posisi x menurut fungsi

$$T(x) = 40 + 20x(2 - x).$$

Tentukanlah suhu rata-rata batang besi tersebut!

$$\frac{1}{2 - 0} \int_0^2 40 + 20x(2 - x) dx = \frac{160}{3}.$$

Jadi suhu rata-rata batang besi tersebut adalah $\frac{160}{3}^{\circ}\text{C}$.

Teorema 4 (Teorema nilai rata-rata untuk integral (*mean value theorem for integral*))

Jika fungsi f kontinu di $[a, b]$, maka ada bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga

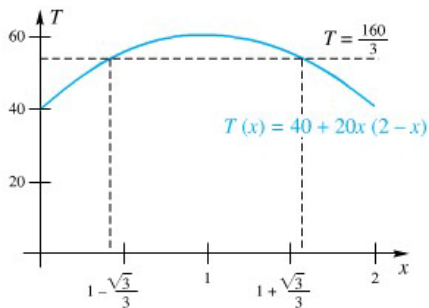
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Contoh 5

Misalkan suhu (dalam derajat Celcius) suatu batang besi dengan panjang 2 m bergantung pada posisi x menurut fungsi

$$T(x) = 40 + 20x(2 - x).$$

Di titik mana suhunya sama dengan suhu rata-rata batang besi tersebut?



Suhu rata-rata batang besi tersebut adalah $\frac{160}{3}^{\circ}\text{C}$.

Dengan Teorema Nilai Rata-rata untuk integral,
 $f(c) = \frac{160}{3}$
 $\Leftrightarrow 40 + 20c(2 - c) = \frac{160}{3}.$

Didapat $c_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ dan
 $c_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Teorema 6 (Teorema simetri)

Jika f adalah fungsi genap, maka

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Jika f adalah fungsi ganjil, maka

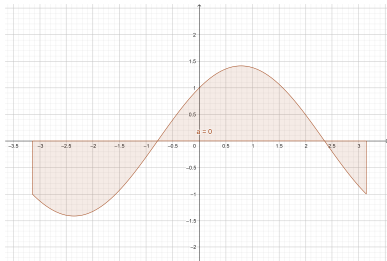
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Catatan

Fungsi f adalah fungsi genap jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$.

Fungsi f adalah fungsi ganjil jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$.

Contoh 7

Hitunglah $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Karena $\sin$ adalah fungsi ganjil, maka $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$.

Karena $\cos$ adalah fungsi genap, maka

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= 2 \sin x \Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Jadi $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x + \cos x \, dx = 0 + 0 = 0$.

Catatan

Fungsi $\sin + \cos$ bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

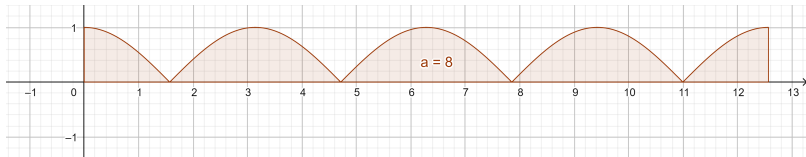
Teorema 8

Jika f adalah fungsi periodik dengan periode p , maka

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Contoh 9

Hitunglah $\int_0^{4\pi} |\cos x| dx$.



Fungsi $|\cos x|$ mempunyai periode π .

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{4\pi} |\cos x| dx \\
 &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx + \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx \\
 &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx \\
 &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx \\
 &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_0^{\pi} |\cos x| dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx \\ &= 4 \left(\int_0^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx \right) \\ &= 4 \left(\sin x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} - \sin x \Big|_{x=\pi/2}^{x=\pi} \right) \\ &= 4 [(1 - 0) - (0 - 1)] = 8. \end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

Tentukanlah semua nilai c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata untuk Integral dari fungsi berikut!

- 1 $f(x) = |x|$ di $[0, 2]$.
- 2 $g(s) = s^3$ di $[0, 2]$.
- 3 $h(t) = \cos t$ di $[-\pi, \pi]$.

Dengan menggunakan Sifat Simetri, hitunglah integral-tentu berikut!

- 1 $\int_{-1}^1 x^3 + x^2 + x + 1 dx.$
- 2 $\int_{-1}^1 |s^3| + s^3 ds.$
- 3 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta.$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI