

Bab 4. Integral-tentu

4.4 Teorema Dasar Kedua Kalkulus dan Metode substitusi

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Teorema 1 (Teorema Dasar II Kalkulus)

Misalkan fungsi f kontinu di $[a, b]$ dan fungsi F adalah **sembarang** antiturunan dari fungsi f di $[a, b]$. Maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Catatan

- 1 Dengan menggunakan Teorema Dasar II Kalkulus, integral-tentu (definite integral) dapat dihitung **tanpa** menggunakan jumlahan Riemann.
- 2 Antiturunan dari fungsi f tidak unik. Teorema tersebut memerlukan salah satu antiturunan dari fungsi f .
- 3 Penulisan lain Teorema Dasar II Kalkulus ditulis sebagai $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$.

Contoh 2

Hitunglah $\int_1^3 x^{1/3} + x^{-2} dx$.

$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x}$ merupakan **suatu** antiturunan dari $x^{1/3} + x^{-2}$.

Berdasarkan Teorema Dasar II Kalkulus,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^{1/3} + x^{-2} dx &= \left(\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{9\sqrt[3]{3}}{4} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \\ &= \frac{9\sqrt[3]{3}}{4} - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Contoh 3

Hitunglah $\int_0^{\pi/2} \cos \theta + \sin \theta d\theta$.

$\sin \theta - \cos \theta$ merupakan **suatu** antiturunan dari $\cos \theta + \sin \theta$.

Berdasarkan Teorema Dasar II Kalkulus,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos \theta + \sin \theta d\theta &= \sin \theta - \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= (1 - 0) - (0 - 1) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Perhitungan integral-tentu $\int_a^b f(x) dx$.

Dalam *GeoGebra*: `Integral[f(x), a, b]`

Dalam *Wolfram Mathematica*: `Integrate[f(x), {x, a, b}]`

Teorema 4 (Aturan substitusi untuk integral tak-tentu)

Misalkan fungsi g dapat diturunkan dan fungsi F adalah **suatu** antiturunan dari fungsi f . Maka

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Contoh 5

Hitunglah $\int \cos(3x + 2) dx$.

Misalkan $u = 3x + 2$, sehingga $du = 3 dx$.

$$\begin{aligned} \int \cos(3x + 2) dx &= \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3}(\sin u + K) \\ &= \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C. \end{aligned}$$

Contoh 6

Hitunglah $\int x \sin x^2 dx$.

Misalkan $u = x^2$, sehingga $du = 2x dx$.

$$\begin{aligned}\int x \sin x^2 dx &= \frac{1}{2} \int \sin u du \\ &= \frac{1}{2} (-\cos u + K) \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C.\end{aligned}$$

Teorema 7 (Aturan substitusi untuk integral-tentu)

Misalkan fungsi g punya turunan yang kontinu di $[a, b]$ dan fungsi f kontinu di range fungsi g . Maka

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Contoh 8

Hitunglah $\int_{-1}^0 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$.

Misalkan $u = x^3 + 1$, sehingga $du = 3x^2 dx$.

Lebih lanjut, jika $x = -1$, maka $u = 0$. Selain itu, jika $x = 0$, maka $u = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_0^1 \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{3} u \sqrt{u} \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{2}{3} (1 - 0) \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Contoh 9

Hitunglah $\int_0^\pi \theta^4 \cos(2\theta^5) d\theta$.

Misalkan $u = 2\theta^5$, sehingga $du = 10\theta^4 d\theta$.

Lebih lanjut, jika $\theta = 0$, maka $u = 0$. Selain itu, jika $\theta = \pi$, maka $u = 2\pi^5$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \theta^4 \cos(2\theta^5) d\theta &= \frac{1}{10} \int_0^{2\pi^5} \cos u du \\ &= \frac{1}{10} \sin u \Big|_{u=0}^{u=2\pi^5} \\ &= \frac{1}{10} \sin(2\pi^5).\end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

Hitunglah integral-tak-tentu berikut!

❶ $\int \sqrt[3]{2x-4} dx$

❷ $\int t(\sqrt{3}t^2 + \pi)^{7/8} dt$

❸ $\int \frac{x \sin \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} dx$

❹ $\int s^2 (s^3 + 5)^8 \cos[(s^3 + 5)^9] ds$

❺ $\int x^{-4} \sec^2(x^{-3} + 1) \sqrt[5]{\tan(x^{-3} + 1)} dx$

Latihan Mandiri.

Hitunglah integral-tentu berikut!

① $\int_{-4}^{-2} x^2 + \frac{1}{x^3} dx$

② $\int_1^4 \frac{s^4-8}{s^2} ds$

③ $\int_0^1 2t(t^2+1)^{10} dt$

④ $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \sin(\cos \theta) d\theta$

⑤ $\int_0^1 x \cos^3(x^2) \sin(x^2) dx$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI