

Bab 4. Integral-tentu

4.3 Teorema Dasar Pertama Kalkulus

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Teorema 1 (Teorema Dasar I Kalkulus)

Misalkan fungsi f kontinu di interval tutup $[a, b]$ dan x adalah titik (variabel) di interval buka (a, b) . Maka

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Catatan

Perhatikan batas bawah integral adalah konstanta a , batas atas integral melibatkan variabel bebas x dan turunannya juga terhadap variabel x .

Contoh 2

Tentukanlah $\frac{d}{dx} \int_1^x 2t \, dt$.

Berdasarkan Teorema Dasar I Kalkulus,

$$\frac{d}{dx} \int_1^x 2t \, dt = 2x.$$

Cara lain (tanpa menggunakan Teorema Dasar I Kalkulus):

Perhatikan $\int_1^x 2t \, dt = t^2 + C$.

Akibatnya, $\frac{d}{dx} \left(\int_1^x 2t \, dt \right) = \frac{d}{dx} (x^2 + C) = 2x$.

Contoh 3

Tentukanlah $D_x \int_x^1 2t \, dt$.

$$D_x \int_x^1 2t \, dt = -D_x \int_1^x 2t \, dt = -2x.$$

Contoh 4

Tentukanlah $\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} 3t - 1 dt$.

Misalkan $f(u) = \int_1^u 3t - 1 dt$ sebagai fungsi luar dan $u = g(x) = x^2$ sebagai fungsi dalam.

Jadi $f(u) = f(g(x)) = \int_1^{x^2} 3t - 1 dt$ dan $\frac{du}{dx} = 2x$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai dan Teorema Dasar I Kalkulus, didapat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_1^{x^2} 3t - 1 dt &= \frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \int_1^u 3t - 1 dt \cdot (2x) \\ &= (3u - 1)(2x) \\ &= 6x^3 - 2x. \end{aligned}$$

Contoh 5

Tentukanlah $D_x \int_1^x x t dt$.

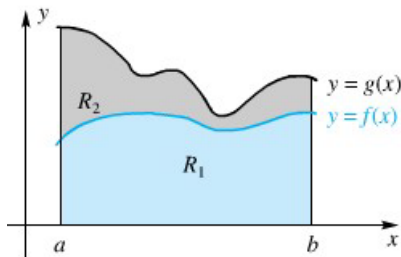
Dengan menggunakan Aturan Turunan Perkalian Fungsi dan Teorema Dasar I Kalkulus, didapat

$$\begin{aligned} D_x \int_1^x x t dt &= D_x \left(x \int_1^x t dt \right) \\ &= \int_1^x t dt + x D_x \int_1^x t dt \\ &= \left. \frac{t^2}{2} \right|_{t=1}^{t=x} + x \cdot x \\ &= \frac{x^2 - 1}{2} + x^2 \\ &= \frac{3x^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 6 (Sifat perbandingan (*comparison property*))

Jika fungsi f dan g terintegralkan di $[a, b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap x di $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

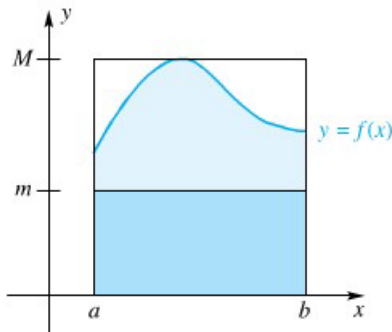


Jika $f(x) \leq g(x)$ di $[a, b]$,
maka luas daerah di bawah
kurva $f \leq$ luas daerah di
bawah kurva g .

Teorema 7 (Sifat keterbatasan (*boundedness property*))

Jika f terintegralkan di $[a, b]$ dan $m \leq f(x) \leq M$ untuk setiap x di $[a, b]$, maka

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$



$m(b-a)$: luas persegi panjang kecil biru (bagian bawah).

$M(b-a)$: luas persegi panjang besar (keseluruhan).

Teorema 8 (Kelinieran integral-tentu (*linearity of the definite integral*))

Misalkan fungsi f dan g terintegralkan di $[a, b]$ dan k adalah konstanta.

Maka fungsi kf dan $f + g$ terintegralkan dan

$$\textcircled{1} \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx,$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Contoh 9

Misalkan $\int_0^1 f(x) dx = 2$, $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^1 g(x) dx = -1$ dan $\int_0^2 g(x) dx = 4$.

Hitunglah $\int_0^2 3f(t) + 2g(t) dt$.

Dengan menggunakan Sifat Kelinieran Integral-tentu, didapat

$$\begin{aligned} & \int_0^2 3f(t) + 2g(t) dt \\ &= 3 \int_0^2 f(t) dt + 2 \int_0^2 g(t) dt \\ &= 3 \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right) + 2 \left(\int_0^1 g(t) dt + \int_1^2 g(t) dt \right) \\ &= 3(2 + 3) + 2(-1 + 4) = 21. \end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

- 1 Tentukanlah interval ketika grafik fungsi

$$y = f(x) = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

naik! Tentukanlah pula interval ketika grafik fungsi f tersebut cekung ke atas.

- 2 Tentukanlah turunan pertama dari

$$g(x) = \int_{-x^2}^x \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

Petunjuk: $\int_{-x^2}^x \square = \int_{-x^2}^0 \square + \int_0^x \square$.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI