FMIPA

Bab 4. Integral-tentu

4.2 Integral-tentu

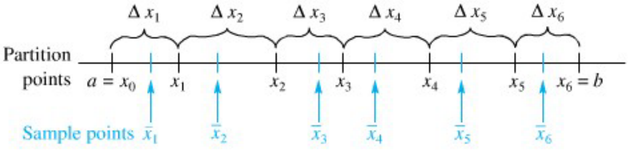
Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Diberikan fungsi 1 variabel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Pertama-tama, pada domain D_f dibuat partisi P sebagai berikut.



A Partition of $[a, b]$ with Sample Points $\bar{x}_i$

Domain $[a, b]$ dipartisi dalam beberapa subinterval, yaitu:

1. subinterval $[a, x_1]$ dengan panjang $\triangle x_1 = x_1 - a$,
2. subinterval $[x_1, x_2]$ dengan panjang $\triangle x_2 = x_2 - x_1$,
3. subinterval $[x_2, x_3]$ dengan panjang $\triangle x_3 = x_3 - x_2$, dst.

Jumlahan Riemann (*Riemann sum*) untuk fungsi f pada partisi P didefinisikan sebagai

$$R_P = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\, \triangle x_k.$$

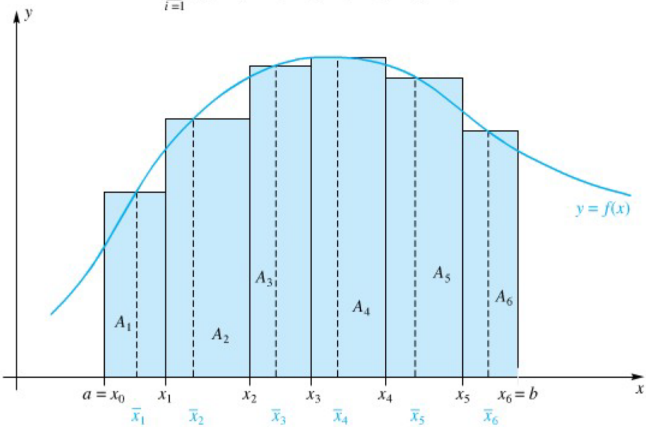
Jumlahan Riemann mempunyai interpretasi sebagai jumlahan luas bertanda dari beberapa persegi panjang.

Catatan

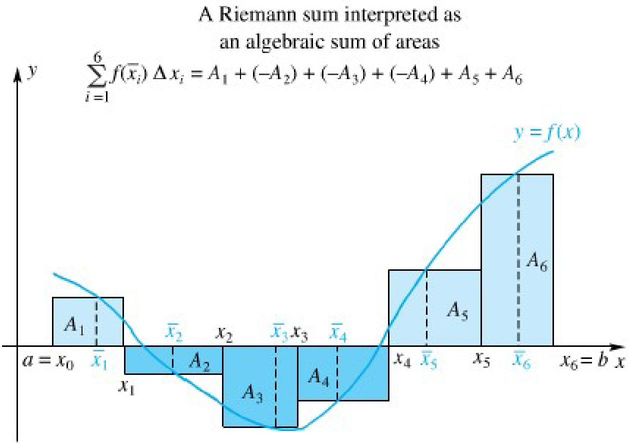
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) merupakan matematikawan Jerman. Kontribusinya sangat banyak di Matematika, di antaranya integral Riemman dan geometri Riemann. Dalam Geometri Riemann, dua garis selalu berpotongan, tidak ada 2 garis yang sejajar.

A Riemann sum interpreted as an algebraic sum of areas

$$\sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$



1. Luas persegi panjang I : $A_1 = f(\bar{x}_1)\,\triangle x_1$,
2. Luas persegi panjang II : $A_2 = f(\bar{x}_2)\,\triangle x_2$, dst.



1. Luas persegi panjang I : $A_1 = f(\bar{x}_1)\,\triangle x_1 > 0$
2. Luas persegi panjang II : $A_2 = |f(\bar{x}_2)|\,\triangle x_2 > 0$

   Luas bertanda persegi panjang II :

   $-A_2 = -|f(\bar{x}_2)|\,\triangle x_2 = f(\bar{x}_2)\,\triangle x_2 < 0$, dst.

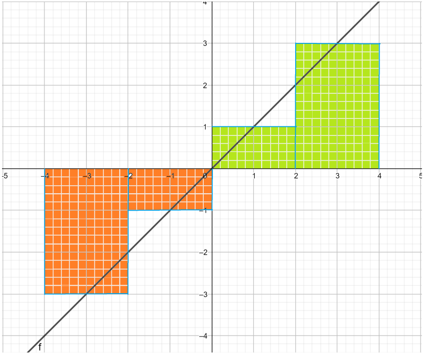
Jadi jumlahan Riemann merupakan jumlahan dari luas bertanda (*signed area*) persegi panjang.

Luas bertanda persegi panjang

1. bernilai positif jika $f(\bar{x}_i) \geq 0$ (persegi panjang di atas sumbu x),
2. bernilai negatif jika $f(\bar{x}_i) < 0$ (persegi panjang di bawah sumbu x).

Contoh 1

Hitunglah jumlahan Riemann R_P untuk $f(x) = x$ dengan domain $[-4, 4]$. Gunakan partisi P dengan titik partisinya -4 < -2 < 0 < 2 < 4 dan titik sampel yang berkaitan $\bar{x}_1 = -3$, $\bar{x}_2 = -1$, $\bar{x}_3 = 1$, $\bar{x}_4 = 3$.



$$
\begin{aligned}
&R_P \\
&= \sum_{k=1}^{4} f(\bar{x}_k) \triangle x_k \\
&= f(\bar{x}_1) \triangle x_1 + f(\bar{x}_2) \triangle x_2 \\
&+ f(\bar{x}_3) \triangle x_3 + f(\bar{x}_4) \triangle x_4 \\
&= (-3)2 + (-1)2 + (1)2 \\
&+ (3)2 \\
&= -6 - 2 + 2 + 6 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Definisi 2

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval tutup $[a, b]$. Jika

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \triangle x_i$$

ada, maka fungsi f dikatakan terintegralkan (*integrable*) di $[a, b]$. Lebih lanjut, $\int_a^b f(x)\,dx$, disebut integral-tentu (*definite integral/Rieman integral*) f dari a hingga b, adalah

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \triangle x_i.$$

Catatan

$||P||$, *dibaca norm partisi* P, *yaitu panjang subinterval terpanjang dari partisi* P.

Jadi $\int_a^b f(x)\,dx$ mempunyai makna luas bertanda dari daerah di antara kurva $y = f(x)$ dan sumbu x pada interval tutup $[a, b]$. Akibatnya, $\int_a^b f(x)\,dx$ dapat bernilai positif atau negatif atau 0.

Sifat dasar integral-tentu.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{dengan } a > b \quad (2)$$

Catatan

Perhatikan batas integral di atas.

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(s)\,ds = \int_a^b f(t)\,dt.$

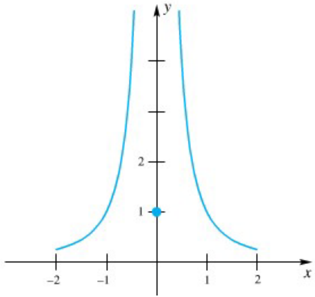
Tidak semua fungsi terintegralkan di interval tutup $[a, b]$.

Contoh 3

Contoh fungsi tak-terintegralkan.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{jika } x \neq 0 \\ 1 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

Grafik fungsi f



Pada contoh ini, fungsi f adalah fungsi tak-terbatas.

Jumlahan Riemannnya dapat dibuat makin lama makin besar. Akibatnya, limit jumlahan Riemannya tidak ada.

Teorema 4 (Teorema keterintegralan/*integrability theorem*)

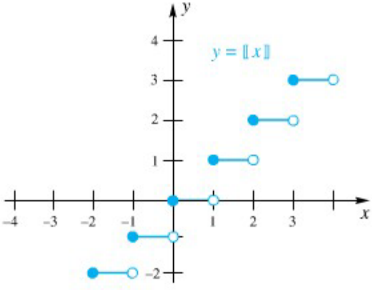
Misalkan fungsi f terbatas pada $[a, b]$ dan kontinu pada $[a, b]$, kecuali di sebanyak hingga titik, maka f terintegralkan di $[a, b]$. Khusunya, jika f kontinu pada seluruh interval $[a, b]$, maka f terintegralkan di $[a, b]$.

Contoh fungsi yang terintegralkan pada interval $[a, b]$:

- fungsi polinomial
- fungsi sinus dan kosinus
- Fungsi rasional, dengan penyebutnya tidak bernilai nol.

Contoh 5

Hitunglah $\int_{-2}^{4} [\![x]\!]\, dx$.



Berdasarkan Teorema keterintegralan, fungsi $[\![\ ]\!]$ terintegralkan karena terbatas di $[-2, 4]$ dan kontinu di $[-2, 4]$, kecuali di 5 titik, yaitu $x =$ -1, 0, 1, 2, 3.

$$\int_{-2}^{4} [\![x]\!]\, dx$$
$$= (-2)1 + (-1)1 + 0(1) + (1)1 + (2)1 + (3)1$$
$$= -2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3$$
$$= 3.$$

FMIPA

Teorema 6 (Sifat penjumlahan interval (*internal additive property*))

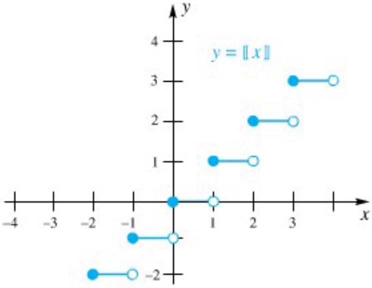
Jika fungsi f *terintegralkan pada interval yang memuat titik* a, b *dan* c, *maka*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

tidak tergantung pada urutan a, b *dan* c

Contoh 7

Hitunglah $\int_{-2}^{2} [\![x]\!]\, dx$.



$$\int_{-2}^{2} [\![x]\!]\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} [\![x]\!]\, dx + \int_{0}^{2} [\![x]\!]\, dx$$
$$= [(-2)1 + (-1)1]$$
$$+[0(1) + (1)1]$$
$$= -3 + 1 = -2.$$

$$\int_{-2}^{2} [\![x]\!]\, dx$$
$$= \int_{-2}^{4} [\![x]\!]\, dx + \int_{4}^{2} [\![x]\!]\, dx$$
$$= [(-2)1 + (-1)1 + 0(1) +$$
$$(1)1 + (2)1 + (3)1]$$
$$+[3(-1) + 2(-1)]$$
$$= 3 - 5 = -2.$$

Latihan mandiri

Hitunglah integral-tentu berikut (jika ada).

1. $\int_{-2}^{2} \; x - 2\, dx$
2. $\int_{-2}^{2} \; x + 2\, dx$
3. $\int_{-2}^{2} \; |x|\, dx$
4. $\int_{-2}^{2} \; 3 - |x|\, dx$
5. $\int_{-2}^{2} [\![x]\!]^2\, dx$
6. $\int_{-2}^{2} \; x - [\![x]\!]\, dx$
7. $\int_{-2}^{2} (x - [\![x]\!])^2\, dx$

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI