Bab 4. Integral-tentu

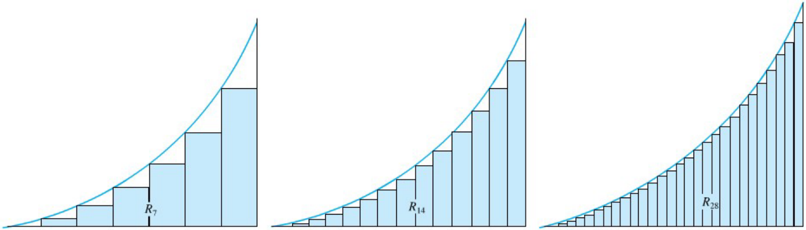
4.1 Pendahuluan luas

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Luas daerah di bawah kurva dapat diaproksimasi dengan menggunakan jumlahan luas persegi panjang di bawah kurva tersebut.



Aproksimasi luas daerah di bawah kurva dengan 7, 14, dan 28 persegi panjang (dari kiri ke kanan).

Makin banyak persegi panjang yang digunakan, hasil aproksimasi makin mendekati luas daerah sesungguhnya.

Jumlahan (*sum*) $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{50} i.$$

Jumlahan $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{4}{17} + \frac{5}{26}$ dapat ditulis sebagai

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i^2+1}.$$

Catatan

Indeks jumlahan dapat diganti dan tidak mengubah jumlahan tersebut. Misalnya

$$\sum_{i=1}^{50} i = \sum_{k=1}^{50} k = \sum_{j=1}^{50} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + 49 + 50.$$

FMIPA

Teorema 1 (Sifat linier jumlahan)

Jika c adalah konstanta, maka

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{3}$$

Bukti.

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\,a_1 + c\,a_2 + \cdots + c\,a_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Contoh 2

Jika jumlahan $\sum_{i=1}^{25} a_i = 30$ dan $\sum_{i=1}^{25} b_i = -15$, hitunglah jumlahan $\sum_{i=1}^{25} a_i - 2\,b_i + 2$.

Dengan menggunakan Sifat Linier Jumlahan,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{25} a_i - 2\,b_i + 2 &= \sum_{i=1}^{25} a_i - \sum_{i=1}^{25} 2\,b_i + \sum_{i=1}^{25} 2 \\
&= \sum_{i=1}^{25} a_i - 2\sum_{i=1}^{25} b_i + \sum_{i=1}^{25} 2 \\
&= 30 - 2(-15) + 2(25) \\
&= 110.
\end{aligned}
$$

FMIPA

Contoh 3

Sederhanakanlah jumlahan $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i)$.

Dengan mensubstitusi indeks i dari 1 hingga n, didapat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) \\
&= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\
&= -a_1 + a_{n+1} \\
&= a_{n+1} - a_1.
\end{aligned}
$$

Jadi $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1$.

Jumlahan ini disebut jumlahan runtuh (*collapsing sum*) karena menyisakan suku awal dan suku akhir saja.

Beberapa rumus jumlahan khusus:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2\,n+1)}{6}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^4 &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3\,n^2+3\,n-1)}{30}. \end{aligned} \tag{8}$$

Contoh 4

Sederhanakanlah jumlahan $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1\\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} 1\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n.\end{aligned}$$

Jadi jumlahan $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n$.

Contoh 5

Berapa banyak jeruk yang terdapat dalam piramida tumpukan jeruk berikut?

Banyaknya jeruk

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 7^2$$

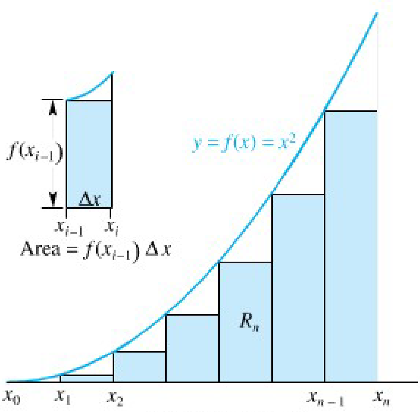
$$= \sum_{i=1}^{7} i^2$$

$$= \frac{7(8)(15)}{6}$$

$$= 140.$$

Contoh 6

Aproksimasilah luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ di $[0, 2]$ dengan pendekatan poligon-dalam (*inscribed polygons*).



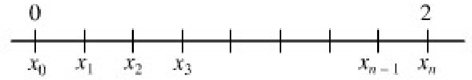
Poligon yang digunakan terdiri atas beberapa persegi panjang.

Pendekatan poligon-dalam: daerah yang diberikan memuat poligon dengan ketat. Satu titik sudut dari tiap persegi panjangnya memotong kurva.

Pertama, partisi interval $[0, 2]$ menjadi n subinterval dengan panjang setiap subintervalnya $\triangle x = \frac{2}{n}$. Masing-masing subinterval tersebut menjadi lebar suatu persegi panjang. Jadi terdapat n persegi panjang.

Didapat $n + 1$ titik partisi, yaitu:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2.$$



Lebih lanjut, $x_1 = \triangle x = \dfrac{2}{n}$, $x_2 = 2\,\triangle x = \dfrac{4}{n}, x_3 = 3\,\triangle x = \dfrac{6}{n}, \ldots,$ $x_{n-1} = (n-1)\,\triangle x = \dfrac{2\,(n-1)}{n}$.

Untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, luas suatu persegi panjang ke i adalah

$$(x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2\, \frac{2}{n} = \frac{4(i-1)^2}{n^2}\,\frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}(i-1)^2.$$

Poligon tersebut terdiri atas n persegi panjang, sehingga luas poligon tersebut adalah

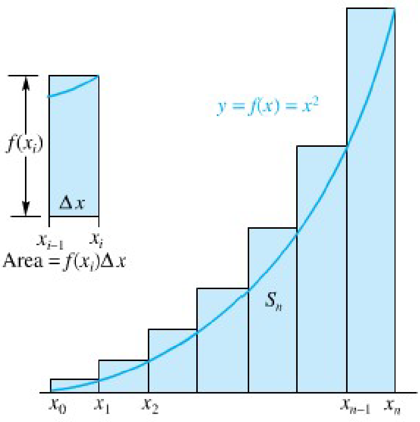
$$\begin{aligned}
A(R_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n^3}(i-1)^2 \\
&= 0 + \frac{8}{n^3} + \frac{8(2^2)}{n^3} + \cdots + \frac{8(n-1)^2}{n^3} \\
&= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\
&= \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2}.
\end{aligned}$$

Luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ pada interval tutup $[0, 2]$ didapat ketika persegi panjang yang digunakan makin lama makin banyak, yaitu:

$$\begin{aligned} A(R) &= \lim_{n\to\infty} A(R_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2} \\ &= \frac{8}{3}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Contoh 7

Aproksimasilah luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ di $[0, 2]$ dengan pendekatan poligon-keliling (*circumscribed polygons*).



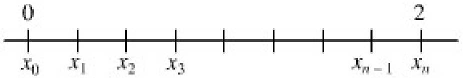
Poligon yang digunakan terdiri atas beberapa persegi panjang.

Pendekatan poligon-keliling: poligon memuat daerah yang diberikan dengan ketat. Satu titik sudut dari tiap persegi panjangnya memotong kurva.

Pertama, partisi interval $[0, 2]$ menjadi n subinterval dengan panjang setiap subintervalnya $\triangle x = \frac{2}{n}$. Masing-masing subinterval tersebut menjadi lebar suatu persegi panjang. Jadi terdapat n persegi panjang.

Didapat $n + 1$ titik partisi, yaitu:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2.$$



Lebih lanjut, $x_1 = \triangle x = \dfrac{2}{n}$, $x_2 = 2\,\triangle x = \dfrac{4}{n}, x_3 = 3\,\triangle x = \dfrac{6}{n}, \ldots,$
$x_{n-1} = (n-1)\,\triangle x = \dfrac{2\,(n-1)}{n}$.

Untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, luas suatu persegi panjang ke i adalah
$(x_i - x_{i-1})\,f(x_i) = (x_i)^2\,\dfrac{2}{n} = \dfrac{4\,i^2}{n^2}\,\dfrac{2}{n} = \dfrac{8}{n^3}\,i^2.$

Poligon tersebut terdiri atas n persegi panjang, sehingga luas poligon tersebut adalah

$$\begin{aligned}
A(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n^3}\, i^2 \\
&= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2}.
\end{aligned}$$

Luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ pada interval tutup $[0, 2]$ didapat ketika persegi panjang yang digunakan makin lama makin banyak, yaitu:

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{n\to\infty} A(S_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3\,n^2} \\ &= \frac{8}{3}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Latihan Mandiri.

1. Tulislah $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100}$ dalam notasi jumlahan $\sum$.
2. Hitunglah $\sum_{k=1}^{100} (3\,k - 2)$.
3. Hitunglah $\sum_{i=1}^{10} (i - 1)(4\,i + 3)$.
4. Hitunglah $\sum_{k=1}^{10} 5\,k^2(k + 4)$.
5. Tentukanlah jumlahan $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)}$.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI