

Aplikasi Turunan

3.8 Antiturunan

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Definisi 1

Fungsi F disebut **antiturunan** (*antiderivative*) dari fungsi f pada interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x di I .

Contoh 2

Antiturunan dari $f(x) = 2x$

- 1 $F(x) = x^2$,
- 2 $F(x) = x^2 + 5$, $F(x) = x^2 - 10$,
- 3 $F(x) = x^2 + C$, dengan C adalah konstanta.

Antiturunan dari $g(x) = \cos x$

- 1 $G(x) = \sin(x)$,
- 2 $G(x) = \sin(x) - 7$, $G(x) = \sin(x) + 2\pi$,
- 3 $G(x) = \sin(x) + C$, dengan C adalah konstanta.

Notasi antiturunan:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

dengan C adalah konstanta, $f(x)$ disebut **integrand**.

Perhatikan:

$$D_x \left[\int f(x) dx \right] = f(x),$$
$$\int D_x[f(x)] dx = f(x) + C$$

Catatan

Antiturunan = **integral tak-tentu** (*indefinite integral*).

Teorema 3 (Aturan pangkat (*power rule*))

Jika r adalah bilangan rasional dan $r \neq -1$, maka

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

Bukti.

Perhatikan $D_x \left(\frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right) = x^r$. Jadi

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$



Teorema 4

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Bukti.

Perhatikan $D_x(-\cos x + C) = \sin x$.

Jadi $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

Perhatikan $D_x(\sin x + C) = \cos x$.

Jadi $\int \cos x \, dx = \sin x + C$. □

Teorema 5 (Integral tak-tentu sebagai operator linier)

Misalkan fungsi f dan g mempunyai anti turunan dan k adalah konstanta.

- ❶ $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx,$
- ❷ $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$
- ❸ $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$

Contoh 6

Tentukanlah $\int 2x + 3 dx$.

$$\begin{aligned}\int 2x + 3 dx &= \int 2x dx + \int 3 dx \\&= 2 \int x dx + 3 \int dx \\&= 2 \left(\frac{1}{2} x^2 + C_1 \right) + 3 (x + C_2) \\&= x^2 + 3x + 2C_1 + 3C_2 \\&= x^2 + 3x + C.\end{aligned}$$

Teorema 7 (Aturan pangkat yang diperumum (*generalized power rule*))

Misalkan g adalah fungsi yang dapat diturunkan, r adalah bilangan rasional dan $r \neq -1$.

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Contoh 8

Tentukanlah $\int \sin^{10} x \cos x \, dx$.

Misalkan $g(x) = \sin x$, sehingga $g'(x) = \cos x$.

Dengan menggunakan Aturan pangkat yang diperumum, didapat

$$\int \sin^{10} x \cos x \, dx = \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Penyelesaian integral tak-tentu $\int f(x) dx$ dengan *software*.

Dalam *GeoGebra*: `Integral(f(x), x)`

Gunakan "Computer Algebra System (CAS) View" untuk perintah di atas.

Dalam *Wolfram Mathematica*: `Integrate[f(x), x]`

Suku konstan C perlu ditambahkan dalam hasilnya.

Latihan Mandiri.

Tentukanlah integral tak-tentu berikut

- 1 $\int \frac{x^6 - x}{x^3} dx.$
- 2 $\int \frac{(z^2 + 1)^2}{\sqrt{z}} dz.$
- 3 $\int (5x^2 + 1) \sqrt{5x^3 + 3x - 2} dx.$
- 4 $\int \sin x (1 + \cos x)^4 dx.$
- 5 $\int |x| dx.$
- 6 $\int \sin^2 x dx.$
- 7 $f(x)$ jika $f''(x) = 3x + 1.$
- 8 $\int x^2 \cos(2x) + x \sin(2x) dx.$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI