

## Bab 3. Aplikasi Turunan

### 3.6 Teorema nilai rata-rata untuk turunan

#### Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

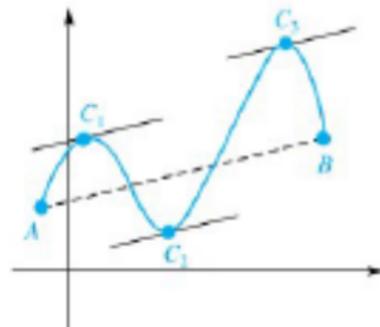
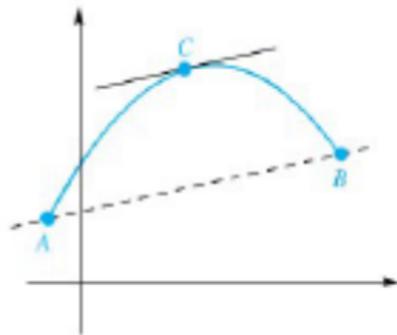
Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia

## Teorema 1 (Teorema nilai rata-rata untuk turunan (*mean value theorem for derivatives*))

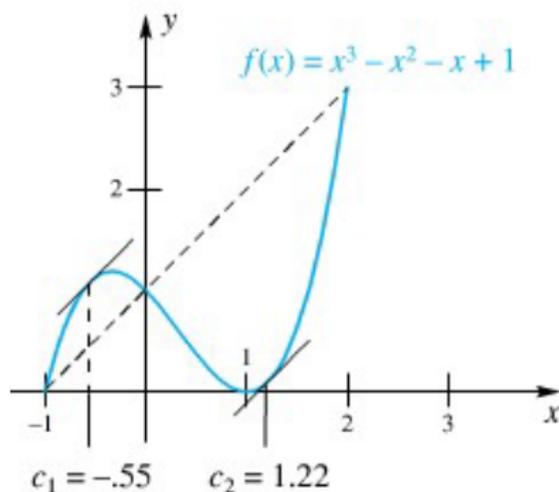
Jika  $f$  kontinu di interval tutup  $[a, b]$  dan dapat diturunkan di  $(a, b)$ , maka ada paling sedikit 1 bilangan  $c$  di  $(a, b)$ , sedemikian sehingga

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



## Contoh 2

Misalkan  $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$  di  $[-1, 2]$ . Tentukanlah semua bilangan  $c$  yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan.



Turunan dari fungsi  $f$  adalah  
 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ .

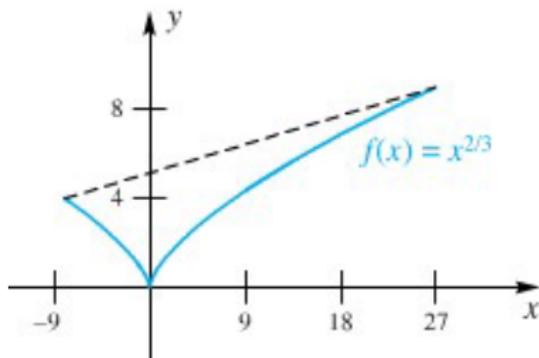
Selanjutnya cari  $c$  yang memenuhi

$$3c^2 - 2c - 1 = \frac{3 - 0}{2 - (-1)} = 1.$$

Diperoleh  $c_1 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \approx -0,55$   
 dan  $c_2 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \approx 1,22$ .

### Contoh 3

Misalkan  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  di  $I = [-8, 27]$ . Tunjukkanlah Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan tidak berlaku dan jelaskanlah alasannya!



Turunan dari fungsi  $f$  adalah  

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \text{ dengan } x \neq 0.$$

Selanjutnya cari  $c$  yang memenuhi

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{9 - 4}{27 - (-8)} = \frac{1}{7}.$$

Diperoleh  $c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$ , tapi  $c \notin I$ .

$f'(0)$  tidak ada, sehingga  $f$  tidak dapat diturunkan di setiap titik pada interval  $(-8, 27)$ . Akibatnya teorema tersebut tidak berlaku.

## Teorema 4

*Jika  $F'(x) = G'(x)$  untuk setiap  $x$  di interval buka  $(a, b)$ , maka ada konstanta  $C$ , sedemikian sehingga*

$$F(x) = G(x) + C,$$

*untuk setiap  $x \in (a, b)$ .*

## Teorema 5 (Teorema Rolle)

*Jika fungsi  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  dan dapat diturunkan di  $(a, b)$ , serta  $f(a) = f(b)$ , maka ada paling sedikit 1 bilangan  $c$  di  $(a, b)$  sedemikian sehingga  $f'(c) = 0$ .*

### Catatan

*Michel Rolle, matematikawan Prancis, 1652-1719.*

*Teorema Rolle merupakan kasus khusus dari Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan.*

## Latihan Mandiri

Tentukanlah apakah Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan berlaku untuk fungsi berikut! Jika berlaku, tentukanlah nilai  $c$  tersebut! Jika tidak, berikanlah alasannya! Berikanlah pula sketsa dari fungsi tersebut!

①  $f(x) = |x|$  di  $[-2, 2]$ .

②  $g(s) = (s + 1)^3$  di  $[-1, 1]$ .

③  $h(t) = \frac{t - 4}{t - 3}$  di  $[0, 4]$ .

## Latihan Mandiri

- 1 Misalkan  $f$  adalah fungsi kuadrat dengan  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  dan  $\alpha \neq 0$ .  
Misalkan pula Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan dikenakan pada fungsi  $f$  tersebut.  
Buktikanlah bilangan  $c$  yang didapat adalah titik tengah dari interval  $[a, b]$ .
- 2 Buktikanlah Teorema Rolle dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan!

## Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

## VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI