

Bab 3. Aplikasi Turunan

3.5 Menggambar grafik fungsi dengan Kalkulus

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Dengan menggunakan konsep turunan pertama dan turunan kedua, kita bisa menggambar grafik fungsi lebih akurat.

Prosedur menggambar grafik:

- 1 Periksa daerah asal dan *range* fungsi,
- 2 Periksa apakah ada kesimetrian terhadap sumbu y (fungsi genap) atau titik asal (fungsi ganjil).
- 3 Cari titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y .
- 4 Gunakan turunan pertama untuk mencari titik kritis dan menentukan di mana fungsi naik dan turun.
- 5 Periksa titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal.
- 6 Gunakan turunan kedua untuk menentukan di mana grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan menentukan titik belok.
- 7 Cari asimtot horizontal, vertikal, miring.
- 8 Gambar beberapa titik, termasuk titik kritis dan titik belok.
- 9 Sketsalah grafik fungsinya.

Contoh 1

Sketsalah grafik fungsi polinomial $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

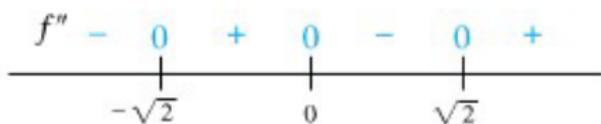
- 1 $D_f = (-\infty, \infty)$, $R_f = (-\infty, \infty)$.
- 2 Perhatikan $f(-x) = \frac{3(-x)^5 - 20(-x)^3}{32} = -\frac{3x^5 - 20x^3}{32} = -f(x)$, sehingga f adalah **fungsi ganjil**. Akibatnya grafiknya simetris terhadap titik asal $(0, 0)$.
- 3 Titik potong dengan sumbu y (substitusi $x = 0$): $(0, 0)$.
Titik potong dengan sumbu x (substitusi $y = 0$):
 $(-\sqrt{20/3}, 0)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{20/3}, 0)$.
- 4 $f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$. Titik kritisnya adalah $x = -2$, $x = 0$ dan $x = 2$.



Fungsi f naik di $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, turun di $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

- 5 Nilai maksimum lokalnya $f(-2) = 2$ dan nilai minimum lokalnya $f(2) = -2$.

6
$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{32}.$$

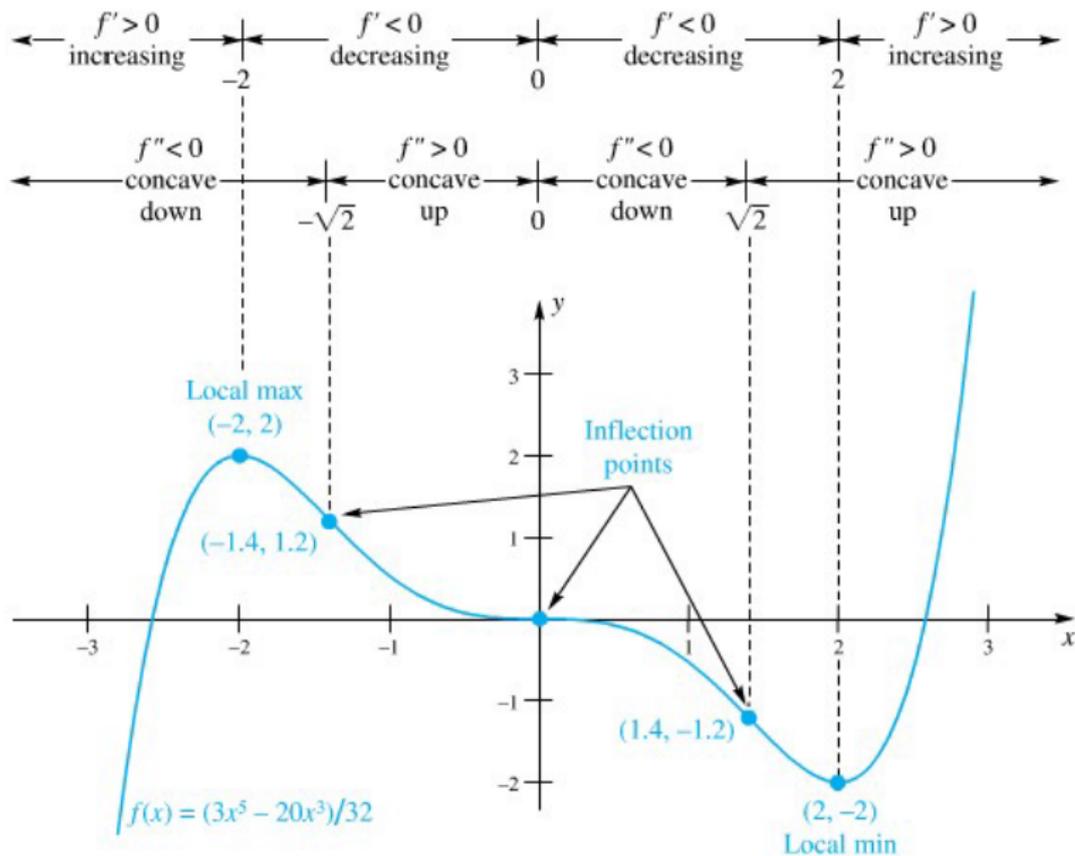


Fungsi f cekung ke atas di $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ dan cekung ke bawah di $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$.

Titik beloknya adalah $(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8)$, $(0, 0)$ dan $(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8)$.

- 7 Tidak ada asimtot horizontal, tegak dan miring.

Hasil dari ketujuh langkah di atas dapat dirangkum dalam gambar di slide berikut ini.



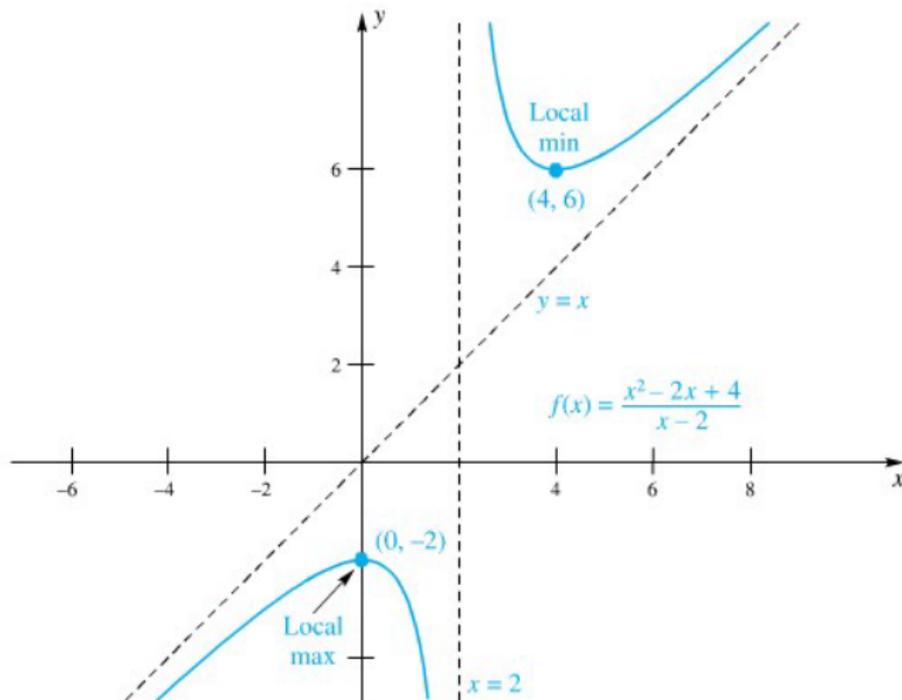
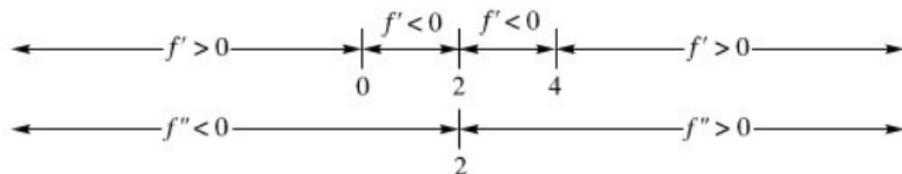
Contoh 2

Sketsalah grafik fungsi rasional $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

- 1 $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$.
- 2 Fungsi f bukan fungsi genap dan bukan pula fungsi ganjil.
- 3 Titik potong dengan sumbu y (substitusi $x = 0$): $(0, -2)$.
Titik potong dengan sumbu x (substitusi $y = 0$): tidak ada karena diskriminan dari $x^2 - 2x + 4$ bernilai negatif.
- 4 $f'(x) = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$.
Titik kritisnya adalah $x = 0$ dan $x = 4$.
Titik singularnya adalah $x = 2$.
Fungsi f naik di $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ dan turun di $(0, 2) \cup (2, 4)$.

- 5 Nilai maksimum lokalnya $f(0) = -2$ dan nilai minimum lokalnya $f(4) = 6$.
- 6 $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$.
 Fungsi f cekung ke atas di $(2, \infty)$ dan cekung ke bawah di $(-\infty, 2)$.
 Karena $f''(x)$ selalu ada dan tidak pernah 0, maka titik beloknya tidak ada.
- 7 Tidak ada asimtot horizontal karena $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
 Asimtot vertikalnya adalah $x = 2$ karena $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$.
 Asimtot miringnya adalah $y = x$ karena $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = 0$.

Hasil dari ketujuh langkah di atas dapat dirangkum dalam gambar di slide berikut ini.



Latihan Mandiri.

Sketsalah fungsi berikut!

① $f(x) = 2x^3 - 3x - 10.$

② $g(x) = \frac{x}{x+1}.$

③ $h(x) = \frac{x}{x^2+4}.$

④ $k(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}.$

⑤ $m(x) = \frac{|x|+x}{2} (3x+2).$

Catatan

Ingat $D_x |x| = \frac{x}{|x|}$ dengan $x \neq 0.$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI