Bab 3. Aplikasi Turunan

3.4 Masalah praktis

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Prosedur umum untuk menyelesaikan masalah optimasi.

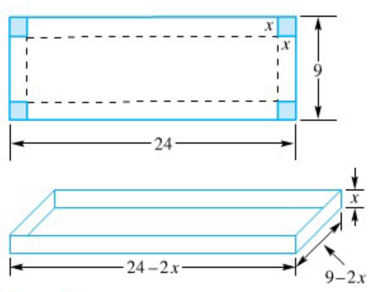
1. Gambarlah untuk masalahnya dan berikan variabel pada besaran yang penting.
2. Tulislah rumus untuk fungsi objektif Q yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan dalam variabel di langkah 1.
3. Gunakan syarat yang diberikan untuk mengeliminasi semua, kecuali 1 variabel. Akibatnya fungsi Q mempunyai 1 variabel bebas saja.
4. Carilah titik kritis dari fungsi Q.
5. Substitusi titik kritis ke fungsi objektif Q atau gunakan Teorema Uji Turunan Pertama atau Kedua untuk menentukan nilai minimum atau maksimum dari fungsi Q.

Catatan

Kadang prosedur di atas perlu disesuaikan dengan soal yang ada.

Contoh 1

Suatu kotak persegi panjang akan dibuat dari karton berukuran 24 cm $\times$ 9 cm dengan cara memotong 4 persegi yang berukuran sama dari keempat pojok karton. Lalu karton dilipat, sehingga terbentuk kotak persegi panjang. Tentukanlah ukuran kotak tersebut agar volumenya maksimum. Hitunglah volumenya!



Misalkan x: panjang sisi persegi yang dipotong.
Perhatikan $x > 0$ dan $x < 4{,}5$.

Volume kotaknya adalah

$$\begin{aligned} V(x) &= (24-2x)(9-2x)x \\ &= 4x^3 - 66x^2 + 216x. \end{aligned}$$

Fungsi V: fungsi objektif.

Volume kotak $V(x)$ akan dimaksimumkan pada $0 < x <$ 4,5.

Turunan dari fungsi V adalah $V'(x) = 12\,x^2 - 132\,x + 216 = 12(x-2)(x-9)$.
Didapat titik kritis dari fungsi objektif V hanyalah $x = 2$.

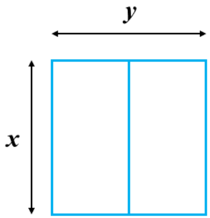
Turunan dari fungsi V' adalah $V''(x) = 24x - 132$.
Karena $V''(2) < 0$, maka berdasarkan Teorema Uji Turunan Kedua $V(2) = 200$ adalah nilai maksimum lokal dari fungsi V.

Karena $V'(x) < 0$ untuk $0 < x < 2$ dan $V'(x) > 0$ untuk $2 < x <$ 4,5, maka 200 juga merupakan nilai maksimum (global) dari fungsi V di $0 < x <$ 4,5.

Jadi kotak persegipanjang mempunyai volume maksimum sebesar 200 cm^3, dengan ukuran kotaknya 20 cm $\times$ 5 cm $\times$ 2 cm.

Contoh 2

Seorang peternak memiliki pagar kawat sepanjang 100 meter. Ia ingin membuat 2 kandang yang berukuran sama dan berdampingan seperti pada gambar di bawah ini. Tentukanlah ukuran kandang agar memiliki luas yang maksimum!



Misalkan
x: panjang kandang,
$\frac{y}{2}$: lebar kandang.

Fungsi objektif: $L = x\,y$.

Kendala: $3\,x + 2\,y = 100$, sehingga $y = 50 - \frac{3x}{2}$.

Jadi fungsi objektifnya adalah $L(x) = 50\,x - \frac{3\,x^2}{2}$.

Fungsi L akan dimaksimumkan pada $0 < x < \frac{100}{3}$.

Turunan dari fungsi L adalah $L'(x) = 50 - 3x$.

Titik kritis dari fungsi L adalah $x = \frac{50}{3}$.

Perhatikan $L'(x) > 0$ untuk $0 < x < \frac{50}{3}$ dan $L'(x) < 0$ untuk untuk $\frac{50}{3} < x < \frac{100}{3}$.

Akibatnya titik kritis $x = \frac{50}{3}$ menghasilkan nilai maksimum (global) $L\left(\frac{50}{3}\right) = \frac{1250}{3}$.

Lebih lanjut, $y = 50 - 25 = 25$.

Jadi agar luas kandang maksimum, maka satu kandangnya mempunyai panjang sebesar $\frac{50}{3}$ m dan lebar sebesar 12,5 m.

Latihan Mandiri.

1. Carilah 2 bilangan yang hasil kalinya adalah -16 dan jumlah dari kuadrat kedua bilangan tersebut minimum.
2. Carilah titik di parabola $x = 2\,y^2$ yang terdekat ke titik $(10, 0)$.
3. Suatu kawat besi dengan panjang 4 m akan dipotong menjadi 2 bagian. Satu bagian membentuk lingkaran dengan jari-jari r dan bagian lainnya membentuk persegi dengan panjang x. Tentukanlah r agar jumlah luas lingkaran dan luas perseginya minimum! Tentukanlah r agar jumlah luas lingkaran dan luas perseginya maksimum!

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI