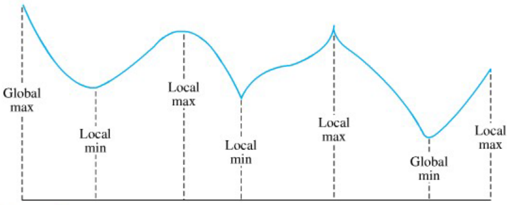
Bab 3. Aplikasi Turunan

3.3 Ekstrim lokal dan ekstrim pada interval buka

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

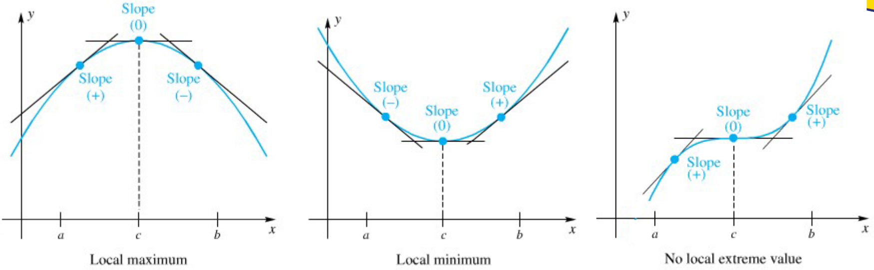
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia



Definisi 1

Misalkan S adalah domain fungsi f dan S memuat titik c.

1. $f(c)$ disebut **nilai maksimum lokal** dari f jika ada interval (a, b) yang memuat c, sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum dari f pada $(a, b) \cap S$.
2. $f(c)$ disebut **nilai minimum lokal** dari f jika ada interval (a, b) yang memuat c, sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum dari f pada $(a, b) \cap S$.
3. $f(c)$ disebut **nilai ekstrim lokal** dari f jika $f(c)$ merupakan salah satu dari nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.



Teorema 2 (Uji turunan pertama (*first derivative test*))

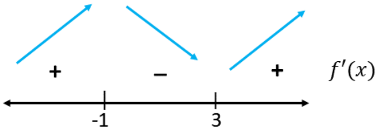
Misalkan fungsi f kontinu pada interval (a, b) yang memuat titik kritis c.

1. *Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk setiap x di (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f.*
2. *Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk setiap x di (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f.*
3. *Jika $f'(x)$ memiliki tanda yang sama untuk kedua sisi dari c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim lokal dari f.*

Contoh 3

Tentukanlah nilai ekstrim lokal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $I = (-\infty, \infty)$ dengan menggunakan Teorema Uji Turunan Pertama.

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = x^2 - 2\,x - 3 = (x-3)(x+1)$.
Karena I tidak mempunyai titik ujung, maka titik kritis fungsi f adalah $x = -1$ dan $x = 3$.



Berdasarkan Teorema Uji Turunan Pertama,

1. Titik kritis $x = -1$ menghasilkan nilai maksimum lokal dari f, yaitu $f(-1) = \frac{17}{3}$.
2. Titik kritis $x = 3$ menghasilkan nilai minimum lokal dari f, yaitu $f(3) = -5$.

Teorema 4 (Uji turunan kedua (*second derivative test*))

Misalkan fungsi f' dan f'' ada di setiap titik di interval (a, b) yang memuat titik c. Misalkan pula $f'(c) = 0$.

1. *Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal dari fungsi f.*
2. *Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal dari fungsi f.*

Catatan

Ingat jika $f''(x) < 0$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah. Jika $f''(x) > 0$, maka grafik fungsi f cekung ke atas.

Contoh 5

Tentukanlah nilai ekstrim lokal dari fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $(-\infty, \infty)$ dengan menggunakan Teorema Uji Turunan Kedua.

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = x^2 - 2\,x - 3 = (x-3)(x+1)$.
Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = 2\,x - 2$.
Perhatikan $f'(-1) = 0$ dan $f'(3) = 0$.

Berdasarkan Teorema Uji Turunan Kedua,

1. Karena $f''(-1) = -4$, maka $f(-1) = \frac{17}{3}$ adalah nilai maksimum lokal dari fungsi f,
2. Karena $f''(3) = 4$, maka $f(3) = -5$ adalah nilai minimum lokal dari fungsi f,

Kadang masalah maksimum dan minimum muncul tidak pada interval tutup seperti di dalam Subbab 3.1.
Namun dengan menggunakan teorema yang telah dijelaskan, masalah maksimum dan minimum pada interval buka ataupun interval setengah buka setengah tutup dapat diselesaikan.

Catatan

Jika tidak ada keterangan lokal, maka maksimum dan minimum yang dimaksud bersifat global.

Contoh 6

Tentukanlah nilai minimum dan nilai maksimum (jika ada) dari $f(x) = x^4 - 4\,x$ di interval buka $I = (-\infty, \infty)$.

Turunan fungsi f adalah
$f'(x) = 4\,x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$.
Karena $x^2 + x + 1 = 0$ tidak punya solusi riil, maka titik kritis dari fungsi f hanyalah $x = 1$.

Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = 12x^2$.
Karena $f''(1) = 12$, maka berdasarkan Teorema Uji Turunan Kedua $f(1) = -3$ adalah nilai minimum lokal dari fungsi f.

Karena $f'(x) < 0$ untuk setiap $x < 1$ dan $f'(x) > 0$ untuk setiap $x > 1$, maka $f(1) = -3$ merupakan nilai minimum (global) dari fungsi f.

FMIPA

Latihan Mandiri.

Tentukanlah titik kritis, nilai minimum lokal, nilai maksimum lokal dari fungsi berikut.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$.
2. $g(s) = s^2 - \dfrac{1}{s}$.
3. $h(t) = \dfrac{3\,t+1}{t^2+1}$.
4. $f(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ dengan $0 < \theta < 2\pi$.
5. $g(s) = |\sin s|$ dengan $-2\,\pi < s < 2\,\pi$.

FMIPA

Latihan Mandiri.

Tentukanlah titik kritis, nilai minimum (global), nilai maksimum (global) (jika ada) dari fungsi berikut.

1. $f(x) = \sin^2(2\,x)$ di $[0, 2]$.
2. $g(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4}$ di $[0, \infty]$.
3. $h(t) = t^2 + \dfrac{16\,t^2}{(8 - t)^2}$ di $(8, \infty)$.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI