

Bab 3. Aplikasi Turunan

3.2 Kemonotonan dan kecekungan

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

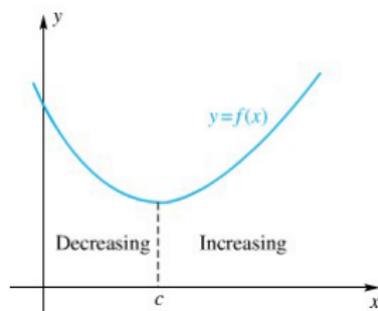
Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

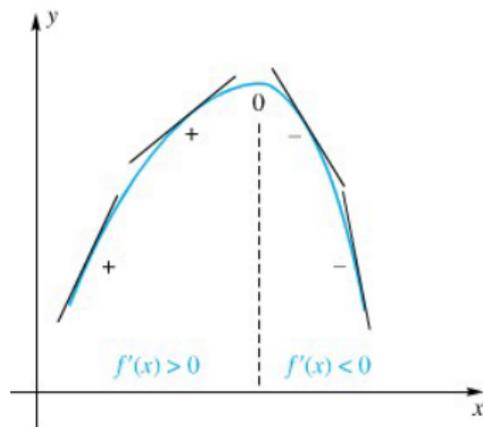
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia



Definisi 1

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval I .

- 1 fungsi f dikatakan **naik** (*increasing*) pada I jika untuk **setiap** pasangan bilangan x_1 dan x_2 di I berlaku:
jika $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- 2 fungsi f dikatakan **turun** (*decreasing*) pada I jika untuk **setiap** pasangan bilangan x_1 dan x_2 di I berlaku:
jika $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- 3 fungsi f dikatakan **monoton ketat** (*strictly monotonic*) pada I jika f naik saja atau turun saja pada I .



Teorema 2 (Teorema kemonotonan)

Misalkan fungsi f **kontinu** pada interval I dan **dapat diturunkan** di setiap titik dalam dari I .

- 1 jika $f'(x) > 0$ untuk setiap titik dalam x di I , maka f **naik** pada I .
- 2 jika $f'(x) < 0$ untuk setiap titik dalam x di I , maka f **turun** pada I .

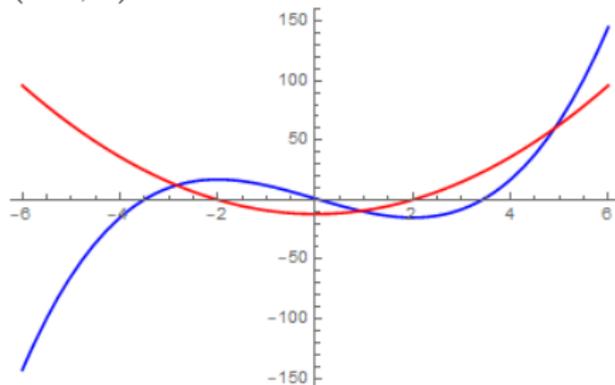
Contoh 3

Tentukanlah interval yang membuat fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 1$ naik atau turun!

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$.

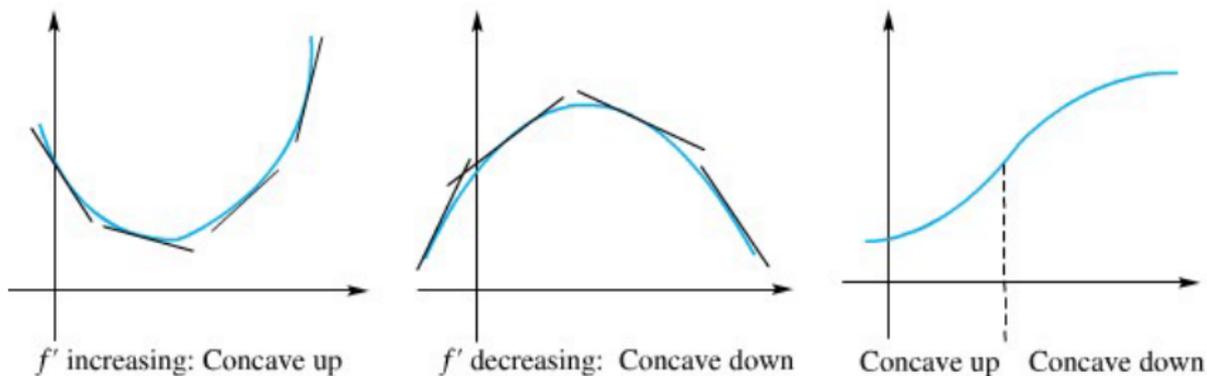
Fungsi f naik jika $f'(x) > 0$, yaitu jika x berada di $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Lebih lanjut, fungsi f turun jika $f'(x) < 0$, yaitu jika x berada di $(-2, 2)$.



Kurva biru: grafik fungsi f .

Kurva merah: grafik fungsi f' .



Definisi 4

Misalkan fungsi f dapat diturunkan pada interval buka I .

Fungsi f dikatakan **cekung ke atas** (*concave up*) pada I , jika fungsi f' naik pada I .

Fungsi f dikatakan **cekung ke bawah** (*concave down*) pada I , jika fungsi f' turun pada I .

Teorema 5 (Teorema kecekungan (*concavity theorem*))

Misalkan fungsi f dapat diturunkan pada interval buka I .

- 1 Jika $f''(x) > 0$ untuk **setiap** x di I , maka f **cekung ke atas** pada I .
- 2 Jika $f''(x) < 0$ untuk **setiap** x di I , maka f **cekung ke bawah** pada I .

Contoh 6

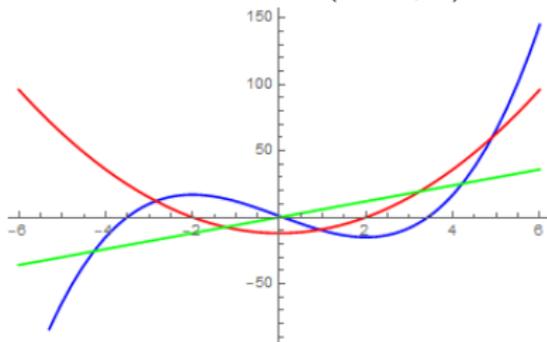
Tentukanlah interval yang membuat fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 1$ cekung ke atas atau cekung ke bawah!

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = 6x$.

Fungsi f cekung ke atas jika $f''(x) > 0$, yaitu: jika x berada di interval $(0, \infty)$.

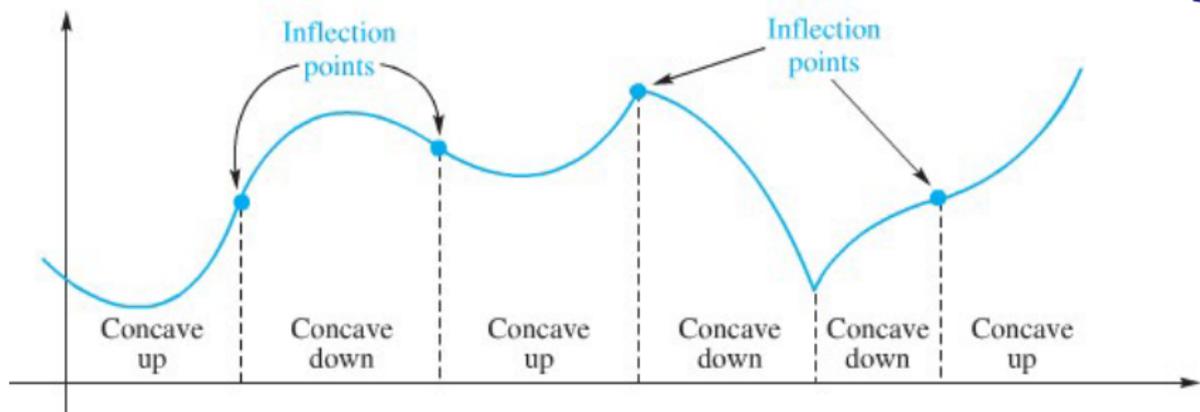
Lebih lanjut, fungsi f cekung ke bawah jika $f''(x) < 0$, yaitu jika x berada di interval $(-\infty, 0)$.



Kurva biru: grafik fungsi f .

Kurva merah: grafik fungsi f' .

Garis hijau: grafik fungsi f'' .



Misalkan fungsi f kontinu pada c .

Titik $(c, f(c))$ disebut **titik belok** (*inflection point*) dari grafik fungsi f jika f **cekung ke atas** pada satu sisi dari $x = c$ dan f **cekung ke bawah** pada sisi lainnya dari $x = c$.

Calon (*candidate*) untuk titik belok dicari dengan $f''(c) = 0$ atau $f''(c)$ tidak ada.

Contoh 7

Tentukanlah titik belok (jika ada) dari fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = 6x$.

Kandidat untuk titik beloknya dicari dengan menyelesaikan $6x = 0$.

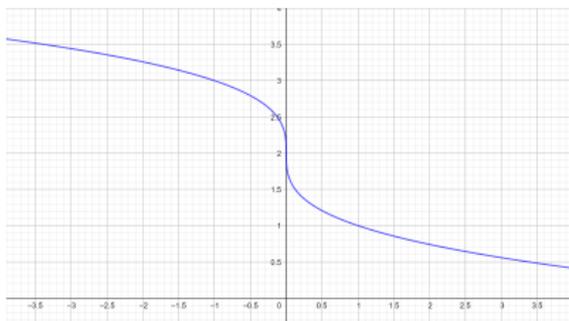
Titik $(x, y) = (0, 1)$ adalah titik belok dari grafik f karena $f''(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$.

Contoh 8

Tentukanlah titik belok (jika ada) dari fungsi $f(x) = -\sqrt[3]{x} + 2$.

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = \frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.



Kandidat untuk titik beloknya dicari dari $f''(x) = 0$ atau $f''(x)$ tidak terdefinisi. Perhatikan $f''(0)$ tidak terdefinisi.

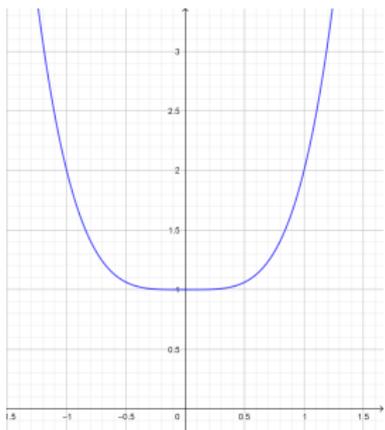
Titik $(x, y) = (0, 2)$ merupakan titik belok dari grafik f karena $f''(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$.

Contoh 9

Tentukanlah titik belok (jika ada) dari fungsi $f(x) = x^4 + 1$.

Turunan fungsi f adalah $f'(x) = 4x^3$.

Turunan fungsi f' adalah $f''(x) = 12x^2$.



Kandidat untuk titik beloknya dicari dengan menyelesaikan $12x^2 = 0$.

Titik $(x, y) = (0, 1)$ **bukanlah** titik belok dari grafik f karena $f''(x) > 0$ untuk $x < 0$ ataupun $x > 0$.

Di sekitar titik $(0, 1)$ tersebut tidak terjadi perubahan kecekungan grafik fungsi f .

Latihan Mandiri

- 1 Tentukanlah interval yang membuat fungsi $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ naik atau turun!
- 2 Tentukanlah interval yang membuat fungsi $f(x) = 2x^2 + \sin^2 x$ cekung ke atas atau cekung ke bawah!
- 3 Tentukanlah interval yang membuat fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 1$ cekung ke atas atau cekung ke bawah! Sketsalah grafik fungsi f tersebut!
- 4 Sketsalah grafik fungsi $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$.
- 5 Tentukanlah nilai a, b, c agar fungsi polinomial kubik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ merupakan fungsi naik!

Pustaka

-  Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI