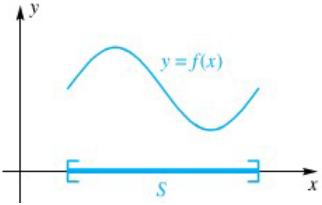
Bab 3. Aplikasi Turunan

3.1 Maksimum dan minimum

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

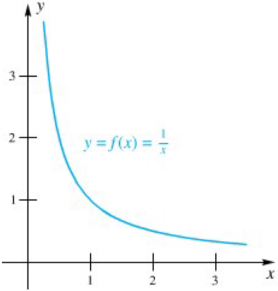
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia



Definisi 1

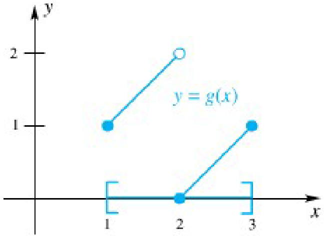
Misalkan interval tutup S adalah domain fungsi f dan memuat titik c.

1. $f(c)$ adalah nilai maksimum (*maximum value*) dari f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap x di S.
2. $f(c)$ adalah nilai minimum (*minimum value*) dari f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk setiap x di S.
3. $f(c)$ adalah nilai ekstrim (*extreme value*) dari f pada S jika $f(c)$ merupakan salah satu dari nilai maksimum atau nilai minimum.
4. fungsi yang dimaksimumkan atau diminimumkan disebut fungsi objektif (*objective function*).



Fungsi $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Pada $(0, \infty)$, fungsi f tidak punya nilai maksimum dan nilai minimum.
2. Pada $[1, 3]$, fungsi f punya nilai maksimum 3 dan nilai minimum $\frac{1}{3}$.
3. Pada $(1, 3]$, fungsi f tidak punya nilai maksimum, tapi punya nilai minimum $\frac{1}{3}$.



Fungsi $y = g(x)$ di atas tidak memiliki nilai nilai maksimum, tapi memiliki nilai minimum 0.

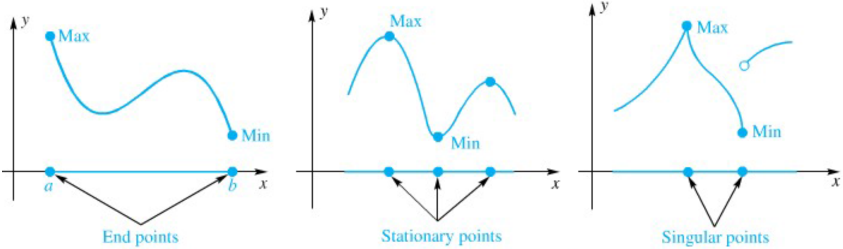
Teorema 2 (Teorema keberadaan maks-min (*max-min existence theorem*))

Jika fungsi f kontinu pada interval tutup $[a, b]$, maka f memiliki nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a, b]$.

Catatan

Teorema di atas memberikan syarat cukup suatu fungsi agar punya nilai maksimum dan nilai minimum.

Misalkan domain fungsi f adalah interval $I = [a, b]$.



Titik $x = a$, $x = b$ disebut titik ujung (*end point*) dari I.

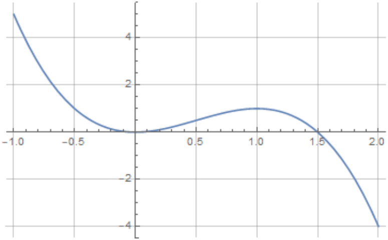
Jika $x = c$ adalah titik dengan $f'(c) = 0$, maka c disebut titik stasioner (*stationary point*).

Jika $x = c$ adalah titik dalam (*interior point*) dari I dan $f'(c)$ tidak ada, maka c disebut titik singular (*singular point*).

Titik ujung, titik stasioner dan titik singular disebut juga titik kritis (*critical point*) dari fungsi f.

Contoh 3

Tentukanlah titik kritis - titik kritis dari fungsi f, dengan $f(x) = -2\,x^3 + 3\,x^2$ di $[-1, 2]$.



Untuk mencari titik stasioner, selesaikan $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$. Didapat $x = 0$ dan $x = 1$.

Fungsi f tidak punya titik singular karena $f'(x) = -6x^2 + 6x$ selalu ada.

Titik ujung dari intervalnya adalah $x = -1$ dan $x = 2$.

Jadi titik kritis dari fungsi f tersebut adalah -1, 0, 1 dan 2.

Teorema 4 (Teorema titik kritis)

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval I yang berisi titik c. Jika $f(c)$ adalan nilai ekstrim, maka c harus merupakan titik kristis.

Titik c tersebut haruslah salah satu dari

1. *titik ujung dari I atau*
2. *titik stasioner dari f atau*
3. *titik singular dari f.*

Contoh 5

Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi f, dengan $f(x) = -2\,x^3 + 3\,x^2$ di $I = [-1, 2]$.

Berdasarkan Contoh 3, didapat titik kritis dari fungsi f adalah $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ dan $x = 2$.
Perhatikan

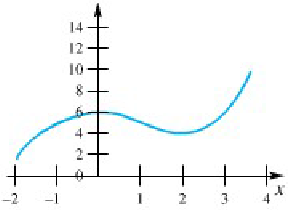
- $f(-1) = 5$,
- $f(0) = 0$,
- $f(1) = 1$,
- $f(2) = -4$.

Jadi nilai maksimum fungsi f di I adalah 5, dicapai ketika $x = -1$ (titik ujung kiri dari I). Lebih lanjut, nilai minimum fungsi f di I adalah -4, dicapai ketika $x = -4$ (titik ujung kanan dari I).

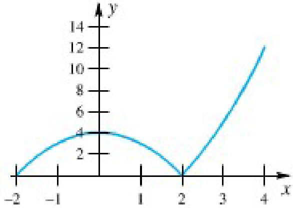
Contoh 6

Carilah semua titik kritis, nilai ekstrim dari fungsi berikut.

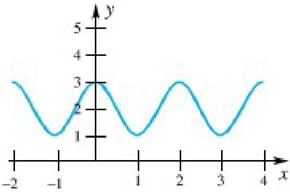
1.



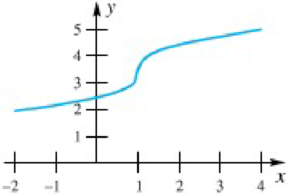
2.



3.



4.



Latihan Mandiri.

Carilah semua titik kritis, nilai ekstrim dari fungsi berikut.

1. $f(x) = x^2 + x$ dengan $I = [-2, 3]$.
2. $g(s) = \dfrac{s}{1+s^2}$ dengan $I = [-1, 4]$.
3. $h(\theta) = \theta^2 \sec\theta$ dengan $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
4. $k(t) = \cos t - \sin t$ dengan $I = [0, 2\pi]$.
5. $p(x) = x - 2\cos x$ dengan $I = [-2\pi, \pi]$.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI