Bab 2. Turunan

2.8 Laju berkaitan

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

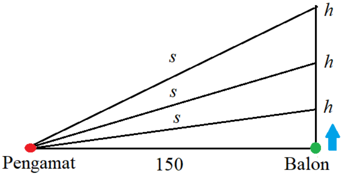
Jika variabel y bergantung pada waktu t, maka turunan (*derivative*) $\frac{dy}{dt}$ disebut laju waktu dari perubahan (*time rate of change*).

Jika variabel y mengukur jarak, maka laju waktu dari perubahan $\frac{dy}{dt}$ disebut kecepatan (*velocity*).

Kadang diketahui $y(t)$, $x(t)$ dengan variabel y dan variabel x berhubungan. Akibatnya, laju $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ merupakan laju yang berkaitan (*related rates*).

Contoh 1

Sebuah balon dilepaskan dari suatu titik yang berjarak 150 m dari seorang pengamat di permukaan tanah. Asumsikan balon tersebut bergerak naik vertikal dengan kecepatan 8 m/detik. Seberapa cepat pertambahan jarak antara pengamat dan balon ketika balon di ketinggian 50 m?



Misalkan t : lama waktu setelah balon dilepas (dalam detik),
$h(t)$: ketinggian balon dari permukaan tanah pada saat t (dalam m),
$s(t)$: jarak antara pengamat dan balon pada saat t (dalam m).

Diketahui: $\frac{dh}{dt} = 8$.
Ditanya: $\frac{ds}{dt}$ ketika $h = 50$.
(berlanjut)

(lanjutan)

Dengan menggunakan rumus Pythagoras, didapat $s^2 = 150^2 + h^2$.

Dengan menerapkan turunan implisit terhadap t dan aturan rantai pada $s^2 = 150^2 + h^2$ didapat

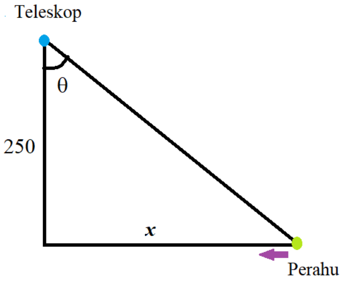
$$\begin{aligned} 2\,s\,\frac{ds}{dt} &= 2\,h\,\frac{dh}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} &= \frac{h}{s}\,\frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

Jika $h = 50$, maka $s = \sqrt{150^2 + 50^2} = 50\sqrt{10}$.
Lebih lanjut, $\frac{ds}{dt} = \frac{50}{50\sqrt{10}}\,8 = \frac{8}{\sqrt{10}}$.

Jadi laju pertambahan jarak antara pengamat dan balon ketika balon di ketinggian 50 m adalah $\frac{8}{\sqrt{10}}$ m/detik. ▲

Contoh 2

Anto berdiri di tebing dan mengamati perahu motor melalui teleskop ketika perahu tersebut mendekati garis pantai yang terletak tepat di bawahnya. Jika teleskop berada 250 m di atas permukaan air dan perahu mendekati dengan kecepatan 20 m/detik, berapa laju perubahan sudut teleskop ketika perahu berada dari 250 m dari pantai?



Misalkan t: waktu (dalam detik),
$x(t)$: jarak perahu ke garis pantai pada saat t (dalam m),
$\theta(t)$: besar sudut teleskop antara tebing dan perahu pada saat t (dalam rad).

Diketahui: $\frac{dx}{dt} = -20$.

Ditanya: $\frac{d\theta}{dt}$ ketika $x = 250$.

(berlanjut)

(lanjutan)

Dari trigonometri, didapat $\tan\theta = \frac{x}{250}$.

Dengan menerapkan turunan implisit terhadap t pada $\tan\theta = \frac{x}{250}$, didapat

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}\frac{dx}{dt}.$$

Jika $x = 250$, maka $\theta = \frac{\pi}{4}$, sehingga $\sec^2\theta = 2$. Lebih lanjut,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{250}(-20) = -\frac{1}{25}.$$

Jadi, laju perubahan sudut teleskop ketika perahu berada dari 250 m dari pantai adalah $-\frac{1}{25}$ rad/detik.

Latihan Mandiri.

1. Suatu cakram besi memuai selama pemanasan. Jika jari-jari cakramnya bertambah dengan laju 0,02 cm per detik, seberapa cepat luas satu sisi cakram bertambah ketika jari-jarinya 8,1 cm?
2. Suatu bola besi jatuh $16t^2$ meter dalam t detik. Bola tersebut dijatuhkan dari ketinggian 64 meter di jarak horizontal 10 meter dari lampu jalan yang tingfinya 48 meter. Seberapa cepat bayangan bola bergerak ketika bola menyentuh permukaan tanah?
3. Suatu bola salju mencair dengan laju yang proporsional dengan luas permukaannya. Buktikanlah jari-jari bola salju menyusut dengan laju konstan!

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI