

Bab 2. Turunan

2.7 Turunan implisit

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

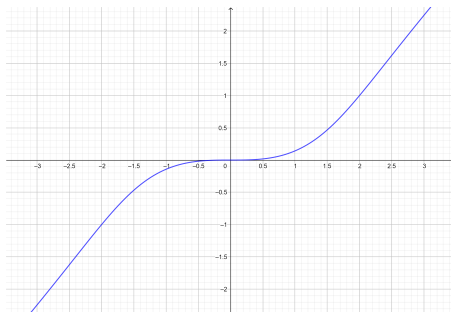
Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Kadang persamaan $F(x, y) = 0$ mempunyai grafik seperti grafik suatu fungsi, tapi y tidak bisa ditulis secara eksplisit dalam bentuk $y = f(x)$.

Dalam hal ini, persamaan $F(x, y) = 0$ mendefinisikan y sebagai **fungsi implisit** (*implicit function*) dari x .

Contoh 1

Persamaan $y^3 + 7y = x^3$.



Grafik persamaan $y^3 + 7y = x^3$ seperti grafik suatu fungsi $y(x)$ karena setiap garis vertikal memotong kurva biru paling banyak di satu titik.

Contoh 2

Diberikan persamaan $x^2 + y^2 = 1$.

Grafik persamaan $x^2 + y^2 = 1$ adalah lingkaran dengan pusat lingkaran di titik $(0, 0)$ dan berjari-jari 1.

Grafik tersebut **bukan** merupakan grafik suatu fungsi $y(x)$ karena ada garis vertikal yang memotong kurva persamaan di 2 titik.

Namun jika grafik tersebut dipecah dua menjadi setengah lingkaran atas dan setengah lingkaran bawah, maka masing-masing setengah lingkaran tersebut adalah grafik dari fungsi.

Fungsi $y = \sqrt{1 - x^2}$ mempunyai grafik setengah lingkaran atas.

Fungsi $y = -\sqrt{1 - x^2}$ mempunyai grafik setengah lingkaran bawah.

Turunan implisit (*implicit differentiation*).

Bagaimana $D_x y$ dari $y^3 + 7y = x^3$? Hitunglah $D_x y$ di titik $(x, y) = (2, 1)$.

Dengan menggunakan Aturan Rantai,

$$\begin{aligned}y^3 + 7y &= x^3 \\D_x (y^3 + 7y) &= D_x x^3 \\D_x y^3 + 7D_x y &= 3x^2 \\3y^2 D_x y + 7D_x y &= 3x^2 \\D_x y &= \frac{3x^2}{3y^2 + 7}\end{aligned}$$

Lebih lanjut, $D_x y(2, 1) = \frac{6}{5}$.

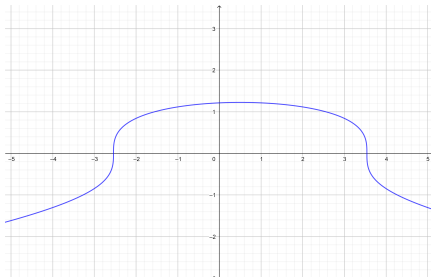
Contoh 3

Tentukanlah dy/dx dari $x^2 + 5y^3 = x + 9$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2 \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$



Teorema 4 (Aturan pangkat (*power rule*))

Misalkan r adalah **bilangan rasional tak-nol**.

Untuk **$x > 0$** , $D_x(x^r) = r x^{r-1}$.

Jika r dapat ditulis dalam suku terendah sebagai $r = \frac{p}{q}$ dengan q adalah **bilangan ganjil**, maka $D_x(x^r) = r x^{r-1}$ untuk **setiap** x .

Contoh 5

Jika $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$, tentukanlah $D_x y$.

$$D_x y = 5 \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Turunan implisit $F(x, y) = 0$ terhadap variabel bebas x .

Dengan *GeoGebra* : `ImplicitDerivative(F(x,y))`

Dengan *Wolfram Mathematica* (jalankan 2 perintah berikut secara berurutan)

- 1 `Dt[F(x,y) == 0, x]`
- 2 `Solve[%,Dt[y,x]]`

Contoh 6

Tentukanlah $D_x y$ dari $y^3 + 7y = x^3$.

Dengan *GeoGebra* : `ImplicitDerivative(y^3 + 7*y - x^3)`

Dengan *Wolfram Mathematica*:

- 1 `Dt[y^3 + 7*y - x^3 == 0, x]`
- 2 `Solve[%, Dt[y,x]]`

Latihan Mandiri.

- 1 Diberikan persamaan $y^3 + 7y = x^3$. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$.
- 2 Tentukanlah $D_x y$ dari persamaan $\cos(xy^2) = y^2 + x$.
- 3 Tentukanlah ds/dt dan dt/ds dari persamaan $s^2t + t^3 = 1$.
- 4 Tentukanlah persamaan garis normal (garis yang tegak lurus dengan garis singgung) terhadap kurva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ di titik $(x, y) = (3, 1)$.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI