

# Bab 2. Turunan

## 2.6 Turunan orde tinggi

### Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia

Operasi turunan dari fungsi  $f$  menghasilkan fungsi baru  $f'$ , turunan dari  $f$ .

Operasi turunan dari fungsi  $f'$  menghasilkan fungsi baru  $f''$ , turunan kedua (*second derivative*) dari  $f$ .

Operasi turunan dari fungsi  $f''$  menghasilkan fungsi baru  $f'''$ , turunan ketiga (*third derivative*) dari  $f$ .

Turunan keempat, kelima dan seterusnya dinotasikan sebagai  $f^{(4)}$ ,  $f^{(5)}$ , ....

## Notations for Derivatives of $y = f(x)$

Derivative	$f'$ Notation	$y'$ Notation	$D$ Notation	Leibniz Notation
First	$f'(x)$	$y'$	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Second	$f''(x)$	$y''$	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Third	$f'''(x)$	$y'''$	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
Fourth	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$ th	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

## Contoh 1

Jika  $y = \cos 3x$ , hitunglah  $\left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_{x=0}$ .

$$\frac{dy}{dx} = -3 \sin 3x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3 \sin 3x) = -3^2 \cos 3x,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(-3^2 \cos 3x) = 3^3 \sin 3x,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(3^3 \sin 3x) = 3^4 \cos 3x.$$

$$\left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_{x=0} = 3^4.$$

## Contoh 2

Rumus  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$  merupakan rumus  $n$  faktorial.

Buktikanlah  $D_x^n x^n = n!$  untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika.

Untuk  $n = 1$ ,  $D_x x = 1! = 1$  adalah benar.

Misalkan untuk  $n = k$ ,  $D_x^k x^k = k!$  adalah benar.

Untuk  $n = k + 1$ , perhatikan

$$\begin{aligned}
 D_x^{k+1} x^{k+1} &= D_x^k (D_x x^{k+1}) \\
 &= D_x^k [(k+1) x^k] \\
 &= (k+1) D_x^k x^k = (k+1) k! = (k+1)!
 \end{aligned}$$

Jadi  $D_x^n x^n = n!$  untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$

## Latihan Mandiri.

- 1 Diberikan fungsi  $y = \frac{2x}{2-x}$ . Tentukanlah  $\frac{d^3y}{dx^3}$ .
- 2 Diberikan fungsi  $f(s) = \frac{(s+2)^2}{s-2}$ . Hitunglah  $f''(4)$ .
- 3 Tentukanlah rumus untuk  $D_x^n \left(\frac{1}{x}\right)$ .
- 4 Misalkan  $g(t) = at^2 + bt + c$ . Jika  $g(1) = 5$ ,  $g'(1) = 3$  dan  $g''(1) = -4$ , tentukanlah nilai  $a, b, c$ .

## Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

## VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI