

Bab 2. Turunan

2.6 Turunan orde tinggi

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Operasi turunan dari fungsi f menghasilkan fungsi baru f' , turunan dari f .

Operasi turunan dari fungsi f' menghasilkan fungsi baru f'' , turunan kedua (*second derivative*) dari f .

Operasi turunan dari fungsi f'' menghasilkan fungsi baru f''' , turunan ketiga (*third derivative*) dari f .

Turunan keempat, kelima dan seterusnya dinotasikan sebagai $f^{(4)}$, $f^{(5)}$,

Notations for Derivatives of $y = f(x)$

Derivative	f' Notation	y' Notation	D Notation	Leibniz Notation
First	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Second	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Third	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
Fourth	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n th	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

Contoh 1

Jika $y = \cos 3x$, hitunglah $\left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_{x=0}$.

$$\frac{dy}{dx} = -3 \sin 3x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-3 \sin 3x) = -3^2 \cos 3x,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(-3^2 \cos 3x) = 3^3 \sin 3x,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(3^3 \sin 3x) = 3^4 \cos 3x.$$

$$\left. \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_{x=0} = 3^4.$$

Contoh 2

Rumus $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ merupakan rumus n faktorial.

Buktikanlah $D_x^n x^n = n!$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan Prinsip Induksi Matematika.

Untuk $n = 1$, $D_x x = 1! = 1$ adalah benar.

Misalkan untuk $n = k$, $D_x^k x^k = k!$ adalah benar.

Untuk $n = k + 1$, perhatikan

$$\begin{aligned}
 D_x^{k+1} x^{k+1} &= D_x^k (D_x x^{k+1}) \\
 &= D_x^k [(k+1) x^k] \\
 &= (k+1) D_x^k x^k = (k+1) k! = (k+1)!
 \end{aligned}$$

Jadi $D_x^n x^n = n!$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Latihan Mandiri.

- 1 Diberikan fungsi $y = \frac{2x}{2-x}$. Tentukanlah $\frac{d^3y}{dx^3}$.
- 2 Diberikan fungsi $f(s) = \frac{(s+2)^2}{s-2}$. Hitunglah $f''(4)$.
- 3 Tentukanlah rumus untuk $D_x^n \left(\frac{1}{x}\right)$.
- 4 Misalkan $g(t) = at^2 + bt + c$. Jika $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$, tentukanlah nilai a, b, c .

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI