

## Bab 2. Turunan

### 2.5 Aturan rantai

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia

Misalkan  $y = (x^2 - x + 3)^{17}$ .

Bagaimanan mencari  $y'$  tanpa menjabarkan fungsi pangkat 17 nya?

Fungsi  $y = (x^2 - x + 3)^{17}$  dapat dipandang sebagai komposisi fungsi  $f$  dan  $g$  sebagai berikut.

Misalkan  $y = f(u) = u^{17}$  dan  $u = g(x) = x^2 - x + 3$ .

Jadi  $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Lalu bagaimana turunan dari fungsi komposisi?

Turunan fungsi komposisi dicari dengan menggunakan Aturan Rantai.

## Teorema 1 (Aturan rantai (chain rule))

Misalkan  $y = f(u)$  dan  $u = g(x)$ .

Jika  $g$  dapat diturunkan di  $x$  dan  $f$  dapat diturunkan di  $u = g(x)$ , maka fungsi komposisi  $f \circ g$ , yang didefinisikan oleh  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , dapat diturunkan di  $x$  dan

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) g'(x) \quad \text{atau} \\ D_x[f(g(x))] &= f'(g(x)) g'(x) \quad \text{atau} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.\end{aligned}$$

### Catatan

*Aturan Rantai: Turunan fungsi komposisi adalah turunan fungsi luar (outer function) dievaluasi di fungsi dalam (inner function), lalu dikali turunan fungsi dalam.*

## Contoh 2

Misalkan  $y = (x^2 - x + 3)^{17}$ . Tentukanlah  $D_x y$ .

Misalkan  $y = f(u) = u^{17}$  sebagai fungsi luar dan  $u = g(x) = x^2 - x + 3$  sebagai fungsi dalam.

Perhatikan  $y = (x^2 - x + 3)^{17} = f(g(x))$ .

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u) g'(x) \\ &= 17 u^{16} (2x - 1) \\ &= 17(x^2 - x + 3)^{16} (2x - 1). \end{aligned}$$

### Contoh 3

Misalkan  $y = \sin 2x$ . Tentukanlah  $D_x y$ .

Misalkan  $y = f(u) = \sin u$  sebagai fungsi luar dan  $u = g(x) = 2x$  sebagai fungsi dalam. Perhatikan  $y = \sin 2x = f(g(x))$ .

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(u) g'(x) \\ &= \cos u (2) \\ &= 2 \cos 2x. \end{aligned}$$

### Catatan

Dengan menggunakan identitas trigonometri  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , didapat  $D_x y = D_x \sin 2x = D_x (2 \sin x \cos x) = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x$ .

## Contoh 4

Tentukanlah  $D_x \sin[\cos(x^2)]$ .

Misalkan  $y = f(u) = \sin u$ ,  $u = g(v) = \cos v$  dan  $v = h(x) = x^2$ .  
Perhatikan  $y = \sin[\cos(x^2)] = f(g(h(x)))$ .

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x (f(g(h(x)))) \\ &= f'(u) g'(v) h'(x) \\ &= \cos u (-\sin v) (2x) \\ &= \cos(\cos v) (-\sin x^2) (2x) \\ &= \cos(\cos x^2) (-\sin x^2) (2x) \\ &= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2). \end{aligned}$$

## Latihan Mandiri.

- 1 Tentukanlah  $D_\theta \cos^4(\sin(2\theta^2))$
- 2 Tentukanlah  $D_x y$  dari  $y = \cos^3\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$ .
- 3 Tentukanlah  $D_t \left( \left( \frac{3t-2}{t+5} \right)^3 \right)$ .
- 4 Tentukanlah  $\frac{d \sin(\cos(\sin 3x))}{dx}$ .
- 5 Tentukanlah persamaan garis singgung terhadap kurva  $y = 1 + x \sin 3x$  di titik  $(x, y) = \left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ .  
Tentukanlah pula titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu  $x$  dan sumbu  $y$  (jika ada)!

## Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

# VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI