

Bab 2. Turunan

2.4 Turunan fungsi trigonometri

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Teorema 1

Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ dapat diturunkan dan

$$D_x(\sin x) = \cos x \text{ dan } D_x(\cos x) = -\sin x.$$

Bukti.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{\sin p - \sin x}{p - x} \\ &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{2 \sin\left(\frac{p-x}{2}\right) \cos\left(\frac{p+x}{2}\right)}{p - x} = \lim_{p \rightarrow x} \frac{\sin\left(\frac{p-x}{2}\right) \cos\left(\frac{p+x}{2}\right)}{\frac{p-x}{2}} \\ &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{\sin\left(\frac{p-x}{2}\right)}{\frac{p-x}{2}} \cdot \lim_{p \rightarrow x} \cos\left(\frac{p+x}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = \cos x. \quad \square \end{aligned}$$

Catatan

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow b} \frac{\sin(a-b)}{a-b} = 1 \Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow b} \frac{\sin((a-b)/2)}{(a-b)/2} = 1.$$

Contoh 2

Tentukanlah $D_x (2 \sin x - 5 \cos x)$

$$\begin{aligned} D_x (2 \sin x - 5 \cos x) &= D_x (2 \sin x) - D_x (5 \cos x) \\ &= 2 D_x \sin x - 5 D_x \cos x \\ &= 2 \cos x + 5 \sin x. \end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukanlah $D_x (x^3 \cos x)$

$$\begin{aligned} D_x (x^3 \cos x) &= \cos x D_x (x^3) + x^3 D_x \cos x \\ &= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x. \end{aligned}$$

Contoh 4

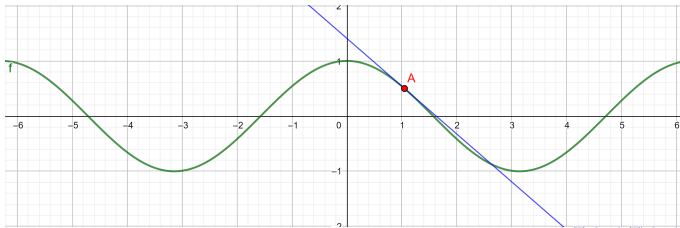
Tentukanlah persamaan garis singgung terhadap kurva $y = \cos x$ di $x = \frac{\pi}{3}$.

Perhatikan $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Selanjutnya $y'(x) = -\sin x$ dan $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Persamaan garis singgungnya adalah

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$



Teorema 5

Untuk setiap titik x di domain fungsi yang bersesuaian,

$$\begin{aligned} D_x \tan x &= \sec^2 x, & D_x \cot x &= -\csc^2 x, \\ D_x \sec x &= \sec x \tan x, & D_x \csc x &= -\csc x \cot x. \end{aligned}$$

Bukti.

$$\begin{aligned} D_x \tan x &= D_x \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x D_x(\sin x) - \sin x D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \\ D_x \sec x &= D_x \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x D_x(1) - 1 D_x \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x. \end{aligned}$$

Contoh 6

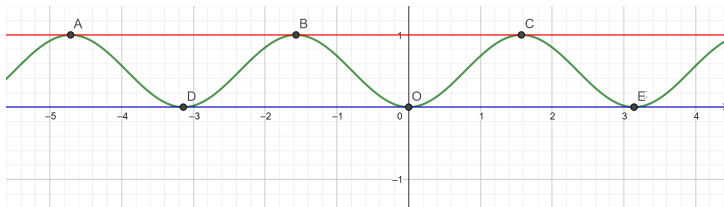
Tentukanlah semua titik di grafik $y = \sin^2 x$ yang punya garis singgung horizontal.

Dengan menggunakan Aturan Perkalian, didapat

$$D_x \sin^2 x = D_x(\sin x \sin x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x).$$

Agar garis singgungnya horizontal, haruslah $\sin(2x) = 0$.

Yang memenuhi persamaan $\sin(2x) = 0$ adalah $2x = k\pi$ atau $x = \frac{k\pi}{2}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$.



Latihan Mandiri.

1. Buktikanlah $D_x \cos x = -\sin x$.
2. Tentukanlah $D_x \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.
3. Tentukanlah $D_x \left(\frac{1 - \sin x}{x} \right)$.
4. Tentukanlah $D_x \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + 1} \right)$.
5. Tentukanlah persamaan garis singgung terhadap kurva $y = \tan x$ di $x = \frac{\pi}{4}$.
6. Tentukanlah semua titik di grafik $y = \tan^2 x$ yang punya garis singgung horizontal.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI