

## Bab 2. Turunan

### 2.3 Aturan turunan

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

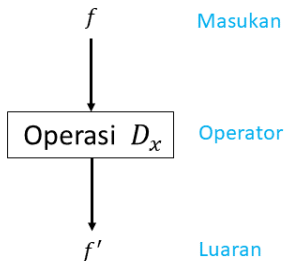
Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia



Pandang  $D_x$  sebagai fungsi (operator).

Ada masukan, yaitu **fungsi**  $f$ .

Ada keluaran, yaitu **fungsi**  $D_x(f) = f'$ .

Jika  $y = f(x)$ , turunan fungsi  $f$  di titik  $x$  dinotasikan sebagai

$$f'(x) \quad \text{atau} \quad D_x(f(x)) \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx}.$$

## Aturan turunan berbagai fungsi.

### Teorema 1 (Aturan fungsi konstan)

Jika  $f(x) = k$ , dengan  $k$  adalah bilangan konstan, maka  $f'(x) = 0$  atau

$$D_x(k) = 0.$$

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x} = \lim_{p \rightarrow x} \frac{k - k}{p - x} = \lim_{p \rightarrow x} \frac{0}{p - x} = 0. \quad \square$$

### Contoh 2

Turunan dari  $y = 2$  adalah  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d2}{dx} = D_x(2) = 0.$

## Teorema 3 (Aturan fungsi identitas)

Jika  $f(x) = x$ , maka  $f'(x) = 1$  atau

$$D_x(x) = 1.$$

Bukti.

$$f'(x) = \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x} = \lim_{p \rightarrow x} \frac{p - x}{p - x} = 1.$$



## Teorema 4 (Aturan pangkat (*power rule*))

Jika  $f(x) = x^n$ , dengan  $n$  adalah **bilangan bulat positif**, maka  $f'(x) = n x^{n-1}$  atau

$$D_x(x^n) = n x^{n-1}$$

.

## Contoh 5

Turunan dari  $y = x^3$  adalah  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d x^3}{dx} = D_x(x^3) = 3 x^2$ .

## Teorema 6 (Aturan kelipatan konstan)

*Jika  $k$  adalah bilangan konstan dan  $f$  adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka  $(kf)'(x) = k f'(x)$  atau*

$$D_x[k f(x)] = k D_x[f(x)].$$

### Contoh 7

Tentukanlah turunan dari  $y = 2x^3$ .

$$D_x(2x^3) = 2 D_x(x^3) = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

## Teorema 8 (Aturan jumlah (*sum rule*))

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka  
 $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  atau

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)].$$

**Bukti.**

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{(f + g)(p) - (f + g)(x)}{p - x} \\ &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) + g(p) - (f(x) + g(x))}{p - x} \\ &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) - f(x) + g(p) - g(x)}{p - x} \\ &= \lim_{p \rightarrow x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x} + \lim_{p \rightarrow x} \frac{g(p) - g(x)}{p - x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

## Contoh 9

Tentukanlah turunan dari  $y = 4x^2 + x^3$ .

$$\begin{aligned}D_x(4x^2 + x^3) &= D_x(4x^2) + D_x(x^3) \\&= 4D_x(x^2) + 3x^2 \\&= 8x + 3x^2.\end{aligned}$$



## Teorema 10 (Aturan selisih (*difference rule*))

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka  $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$  atau

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x[f(x)] - D_x[g(x)].$$

### Contoh 11

Tentukanlah turunan dari  $y = 4t^2 - t^5$ .

$$\begin{aligned} D_t(4t^2 - t^5) &= D_t(4t^2) - D_t(t^5) \\ &= 4D_t(t^2) - 5t^4 \\ &= 8t - 5t^4. \end{aligned}$$

## Teorema 12 (Aturan perkalian (*product rule*))

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat diturunkan, maka  $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$  atau

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x[g(x)] + g(x)D_x[f(x)].$$

### Contoh 13

Tentukanlah turunan dari  $y = s^2(s^3 + 3)$ .

$$\begin{aligned}D_s[s^2(s^3 + 3)] &= s^2 D_s(s^3 + 3) + (s^3 + 3) D_s(s^2) \\&= s^2[D_s(s^3) + D_s(3)] + (s^3 + 3)(2s) \\&= s^2(3s^2 + 0) + 2s^4 + 6s \\&= 5s^4 + 6s.\end{aligned}$$

## Teorema 14 (Aturan pembagian (*quotient rule*))

Jika  $f$  dan  $g$  adalah fungsi yang dapat diturunkan dengan

$g(x) \neq 0$ , maka  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$  atau

$$D_x \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) D_x[f(x)] - f(x) D_x[g(x)]}{g^2(x)}.$$

### Contoh 15

Tentukanlah turunan dari  $y = \frac{x^3 - 5}{2x}$ .

$$\begin{aligned} D_x \left( \frac{x^3 - 5}{2x} \right) &= \frac{(2x) D_x(x^3 - 5) - (x^3 - 5) D_x(2x)}{(2x)^2} \\ &= \frac{(2x)(3x^2 - 0) - (x^3 - 5)(2)}{4x^2} = \frac{2x^3 + 5}{2x^2}. \end{aligned}$$

## Latihan Mandiri.

- ❶ Carilah turunan dari  $y = \frac{2}{x^3} + x^3$ .
- ❷ Carilah turunan dari  $y = (2s - 1)^{10}$ .
- ❸ Carilah turunan dari  $y = (3t^2 - 2t)(t^4 + 2t - 4)$ .
- ❹ Carilah turunan dari  $y = \frac{3p^2 + 2}{p^4 + 2p + 1}$ .
- ❺ Tentukanlah persamaan garis singgung terhadap kurva  $y = x^2 - 2x + 2$  di titik  $(1,1)$ .
- ❻ Tentukanlah semua titik di grafik  $y = x^3 - x^2$  yang garis singgungnya merupakan garis horizontal!

## Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

## VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI