

Bab 1. Limit

1.6 Kekontinuan fungsi

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

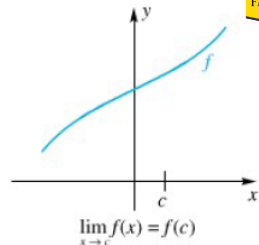
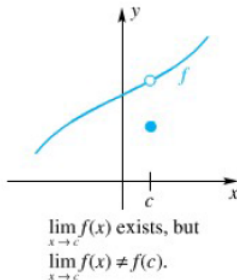
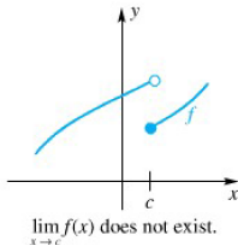
Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia



Definisi 1 (fungsi kontinu di suatu titik)

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval buka yang memuat c .
Fungsi f disebut **kontinu** pada $x = c$ jika

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Contoh 2

Apakah fungsi $y = f(x) = x^2 - 9$ kontinu di $x = 3$? Jelaskanlah!

Perhatikan $f(3) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = 0$.

Karena $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 9 = f(3)$, maka fungsi f kontinu di $x = 3$.

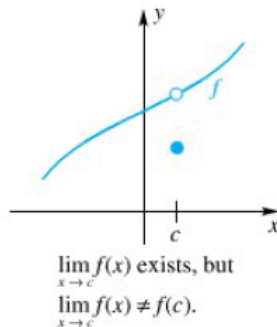
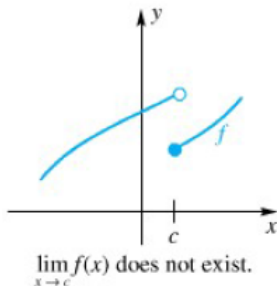
Contoh 3

Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \llbracket x \rrbracket$ tidak kontinu!

Misalkan n adalah bilangan bulat.

$\lim_{x \rightarrow n} \llbracket x \rrbracket$ tidak ada karena $\lim_{x \rightarrow n^+} \llbracket x \rrbracket = n$ tapi $\lim_{x \rightarrow n^-} \llbracket x \rrbracket = n - 1$.

Jadi fungsi $y = \llbracket x \rrbracket$ tidak kontinu di x yang merupakan bilangan bulat.



Ketidakkontinuan fungsi f di $x = c$ (gambar kiri) **tidak dapat** diperbaiki karena fungsi f tidak punya limit.

Ketidakkontinuan fungsi f di $x = c$ (gambar kanan) **dapat** diperbaiki jika nilai $f(c)$ **didefinisikan ulang**, sehingga $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Contoh 4

Misalkan $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. Bagaimana f didefinisikan di $x = 2$ agar f kontinu di $x = 2$?

Perhatikan

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Agar fungsi f kontinu di $x = 2$, definisikan $f(2) = 4$.

Teorema 5 (Kekontinuan fungsi polinomial dan fungsi rasional)

*Fungsi polinomial kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Fungsi rasional kontinu di **setiap** bilangan riil c dalam domainnya, yaitu di setiap titik, kecuali di titik yang nilai penyebutnya nol.*

Teorema 6 (Kekontinuan fungsi nilai mutlak dan fungsi akar ke n)

*Fungsi nilai mutlak kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Jika n adalah bilangan ganjil, fungsi akar ke n kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Jika n adalah bilangan genap, fungsi akar ke n kontinu di **setiap** bilangan riil positif c .*

Teorema 7 (Kekontinuan terhadap operasi fungsi)

Jika fungsi f dan g kontinu di $x = c$, maka

- ① $k.f$,
- ② $f + g$,
- ③ $f - g$,
- ④ $f.g$,
- ⑤ $\frac{f}{g}$ (dengan syarat $g(c) \neq 0$),
- ⑥ f^n , dan
- ⑦ $\sqrt[n]{f}$ (dengan syarat $f(c) > 0$ jika n adalah bilangan genap)

juga kontinu di $x = c$.

Teorema 8 (Kekontinuan fungsi trigonometri)

*Fungsi sinus dan cosinus kontinu di **setiap** bilangan riil c .*

*Fungsi $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, dan $\csc(x)$ kontinu di **setiap** bilangan riil c dalam domain mereka.*

Teorema 9 (Teorema limit komposisi)

*Jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ dan f **kontinu** di $x = L$, maka*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L).$$

Secara khusus, jika g kontinu di $x = c$ dan f kontinu di $x = g(c)$, maka komposisi $f \circ g$ kontinu di $x = c$.

Definisi 10 (Kekontinuan fungsi pada interval)

Fungsi f dikatakan **kontinu kanan** di $x = a$ jika

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Fungsi f dikatakan **kontinu kiri** di $x = b$ jika

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Fungsi f dikatakan kontinu pada **interval buka** (a, b) jika f kontinu pada **setiap** titik di (a, b) .

Fungsi f dikatakan kontinu pada **interval tutup** $[a, b]$ jika f kontinu pada interval buka (a, b) , f kontinu kanan di $x = a$ dan f kontinu kiri di $x = b$.

Teorema 11 (Teorema nilai antara (*intermediate value theorem*))

Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi pada interval tutup $[a, b]$ dan W adalah sembarang bilangan di antara $f(a)$ dan $f(b)$.

Jika f **kontinu** pada $[a, b]$,
maka ada **paling sedikit 1** bilangan c di antara a dan b ,
sedemikian sehingga $f(c) = W$

Catatan

Manfaat Teorema Nilai Antara: menentukan apakah suatu persamaan mempunyai solusi dalam suatu interval.

Contoh 12

Buktikanlah bahwa persamaan $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ mempunyai paling sedikit 1 solusi riil!

Misalkan $f(x) = x^5 + 4x^3 - 7x + 14$.

Perhatikan f terdefinisi pada $[-2, 1]$, $f(-2) = -70$ dan $f(1) = 12$.

Lebih lanjut, $-70 = f(-2) < 0 < f(1) = 12$.

Karena fungsi polinomial f adalah fungsi kontinu, maka berdasarkan Teorema Nilai Antara ada paling sedikit 1 bilangan c di antara -2 dan 1 sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Jadi persamaan tersebut mempunyai paling sedikit 1 solusi riil.

Latihan Mandiri.

- 1 Apakah fungsi $y = x^2 - 9$ kontinu di $x = 3$? Jelaskanlah!
- 2 Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \llbracket 2x \rrbracket$ tidak kontinu!
- 3 Tentukanlah di titik apa saja fungsi $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ tidak kontinu!
- 4 Apakah persamaan $(\cos x) x^3 + 6 \sin^5 x - 3 = 0$ punya solusi riil antara 0 dan 2π ?

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI