

Bab 1. Limit

1.5 Limit di tak-hingga dan limit tak-hingga

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

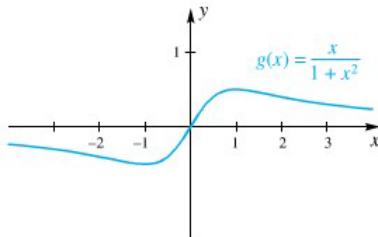
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Limit di tak-hingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = \dots$$

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0.099
100	0.010
1000	0.001
10000	0.0001
↓	↓
∞	?



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

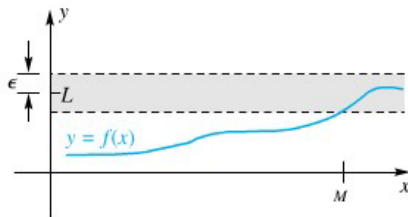
Catatan

$x \rightarrow \infty$: nilai x semakin besar dan tanpa batas, ∞ bukan bilangan.

Definisi 1

Misalkan fungsi f terdefinisi di $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c .

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, **ada** bilangan M , sedemikian sehingga jika $x > M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Definisi 2

Misalkan fungsi f terdefinisi di $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, **ada** bilangan M , sedemikian sehingga jika $x < M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 3

Misalkan k adalah bilangan bulat positif.

Buktikanlah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

Ambil $\varepsilon > 0$.

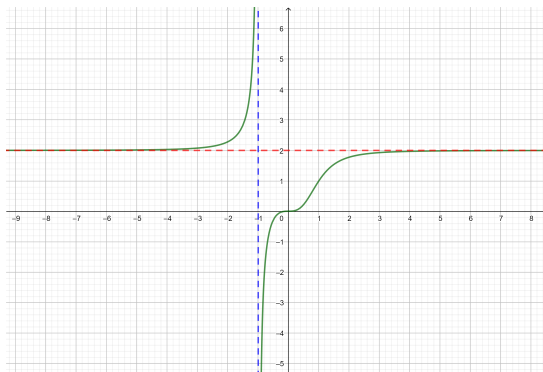
Pilih $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$.

Jika $x > M$, maka

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon.$$

Contoh 4

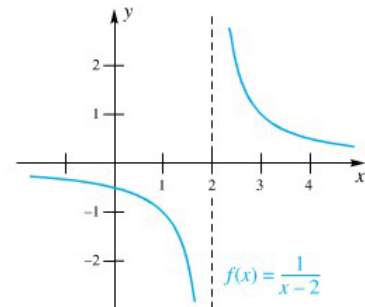
Hitunglah $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{1+x^3}$.



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{1+x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1/x^3 + 1} \\ &= \frac{2}{0+1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Limit tak-hingga

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \dots$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \text{ (tidak ada)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \text{ (tidak ada)}.$$

Definisi 5

$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M , **ada** bilangan $\delta > 0$, sedemikian sehingga jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Contoh 6

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ (jika ada).

Perhatikan

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty.$$

Jadi $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6}$ tidak ada.

Garis $x = c$ disebut **asimtot vertikal** dari grafik fungsi f jika salah satu dari pernyataan berikut benar:

- ❶ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ atau
- ❷ $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ atau
- ❸ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ atau
- ❹ $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$.

Catatan

Asimtot vertikal berkaitan dengan penyebut fungsi yang bernilai 0.

Garis $y = b$ disebut **asimtot horizontal** dari grafik fungsi f jika salah satu dari pernyataan berikut benar:

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ atau
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$

Contoh 7

Tentukanlah asimtot vertikal dan asimtot horizontal dari grafik fungsi f dengan $f(x) = \frac{3x}{x+1}$.

Asimtot vertikalnya adalah $x = -1$ karena

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1} = -\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = \infty.$$

Asimtot horizontalnya adalah $y = 3$ karena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+1} = 3 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x+1} = 3.$$

Garis $y = ax + b$ disebut **asimtot miring** (*oblique asymptote*) dari grafik fungsi $y = f(x)$ jika berlaku salah satu berikut.

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ atau
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$

Catatan

Ciri fungsi $y = f(x)$ punya asimtot miring adalah f merupakan fungsi rasional dengan derajat fungsi polinomial pembilang $>$ derajat fungsi polinomial penyebut.

Contoh 8

Tentukanlah asimtot miring dari $y = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$.

Perhatikan $\frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = 3x + 4 + \frac{4x + 3}{x^2 + 1}$.

Lebih lanjut,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} - (3x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = 0 \text{ dan}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1} - (3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{x^2 + 1} = 0.$$

Jadi asimtot miringnya adalah garis $y = 3x + 4$.

Penyelesaian $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

- Dalam *Geogebra*: Limit[f(x), infinity]
- Dalam *Wolfram Mathematica*: Limit[f(x), x $\rightarrow$ Infinity]

Latihan Mandiri.

Hitunglah (jika ada)

- 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4 - x^3}$
- 2 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 t}{t^2 - 5}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x + 1}}{x + 4}$
- 4 $\lim_{t \rightarrow \pi^+} \frac{t^2}{\sin t}$
- 5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\llbracket x \rrbracket}{x}$
- 6 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\llbracket x \rrbracket}{x}$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI