

Bab 1. Limit

1.3 Teorema limit

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Teorema 1

Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan k adalah bilangan konstan, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dan $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ **ada**.

- ❶ $\lim_{x \rightarrow c} k = k,$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow c} x = c,$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow c} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x),$
- ❹ $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x),$
- ❺ $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x),$
- ❻ $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x),$

(lanjutan)

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}, \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0,$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right]^n,$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \text{ dengan } \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0 \text{ jika } n \text{ adalah bilangan genap.}$$

Teorema di atas juga berlaku untuk limit kiri dan limit kanan.

Contoh 2

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} 2x^4 &= 2 \lim_{x \rightarrow 3} x^4 && \text{(butir 3)} \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 3} 2x \right)^4 && \text{(butir 8)} \\ &= 2 \cdot 3^4 = 162.\end{aligned}$$

Teorema 3 (Teorema substitusi)

Jika f adalah fungsi polinomial atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

asalkan $f(c)$ terdefinisi.

Untuk kasus fungsi rasional, nilai penyebut di $x = c$ tidak boleh 0.

Contoh 4

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x + 1}.$

Dengan menggunakan Teorema Substitusi,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 3x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{1^5 + 3 \cdot 1^3 - 1}{1^2 + 1 + 1} = 1.$$

Teorema 5

Jika

- 1 $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di suatu interval buka yang memuat bilangan c , **kecuali** mungkin pada bilangan c itu sendiri, dan
- 2 $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ **ada**,

maka

- 1 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ **ada** dan
- 2 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.

Contoh 6

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Misalkan $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ dan $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

Perhatikan $f(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in (0, 2)$, kecuali di $x = 1$.

Perhatikan pula $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2$.

Akibatnya $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ada dan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

Cara di atas dapat diringkas menjadi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2.$$

Teorema 7 (Teorema apit (*squeeze theorem*))

Misalkan f, g, h adalah fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk setiap x di dekat c , kecuali mungkin pada c .

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

Contoh 8

Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

Perhatikan

$$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

untuk setiap x di dekat 0, tapi tidak di $x = 0$.

Karena $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, maka berdasarkan Teorema Apit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Latihan Mandiri

Hitunglah

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}.$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0} x - \llbracket x \rrbracket.$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow 0} \llbracket x^2 + 2x \rrbracket.$$

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI