

# Bab 0. Pendahuluan

## 0.7 Fungsi Trigonometri

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Indonesia

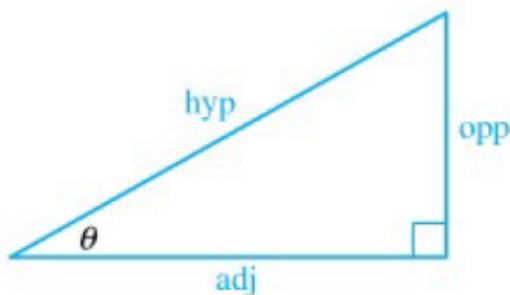


*fungsi  
trigonometri?*



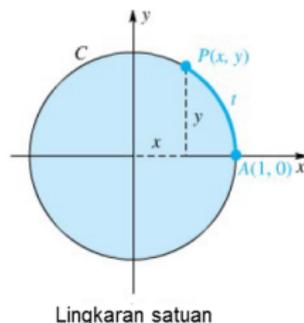
# Definisi Fungsi Trigonometri

## Definisi Fungsi Trigonometri Berdasarkan Segitiga Siku-siku



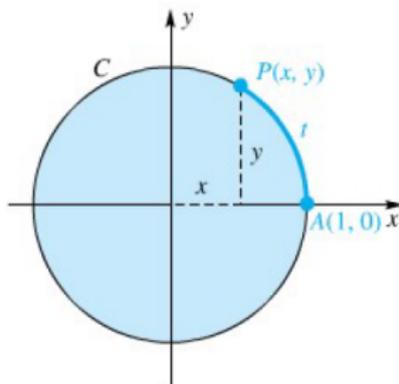
$$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} ; \quad \cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} ; \quad \tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

## Definisi Fungsi Trigonometri Berdasarkan Lingkaran Satuan



Misalkan  $C$  adalah lingkaran satuan dengan persamaan  $x^2 + y^2 = 1$ , yaitu lingkaran yang berpusat di titik asal dengan jari-jari 1.

Titik  $(1,0)$  dinyatakan oleh  $A$ , dan misalkan  $t$  adalah sembarang bilangan positif. Maka, terdapat tepat satu titik  $P(x,y)$  pada  $C$  sedemikian sehingga panjang busur  $AP$ , yang diukur menurut arah **berlawanan dengan putaran jarum jam** dari  $A$  sepanjang lingkaran satuan, adalah  $t$ .



- Jika  $t = 0$ , maka  $P = A$ .
- Keliling  $L$  adalah  $2\pi$ ; sehingga jika  $t > 2\pi$ , diperlukan lebih dari satu putaran penuh dari lingkaran satuan untuk menelusuri busur  $AP$ .
- Demikian juga jika  $t < 0$ , maka akan diperoleh persis satu titik  $P(x, y)$  pada lingkaran satuan itu, sedemikian sehingga bila kita mengukurnya searah putaran jarum jam pada  $L$ , maka panjang busur  $AP$  adalah  $t$ .

Jadi dengan sembarang bilangan real  $t$ , kita dapat menemukan atau menyesuaikan dengan sebuah titik unik  $P(x, y)$ .

Oleh karena itu, dapat dibuat definisi kunci fungsi trigonometri sinus dan cosinus sebagai berikut.

### Definisi 1

Misalkan  $t$  menentukan titik  $P(x, y)$  seperti ketentuan yang ditunjukkan di atas. Maka

$$\sin t = y \quad \text{dan} \quad \cos t = x$$

## Sifat Dasar Sinus dan Cosinus

- Dari definisi yang diberikan, diperoleh bahwa  $x$  dan  $y$  bervariasi antara  $-1$  dan  $1$ , sehingga

$$|\sin t| \leq 1$$

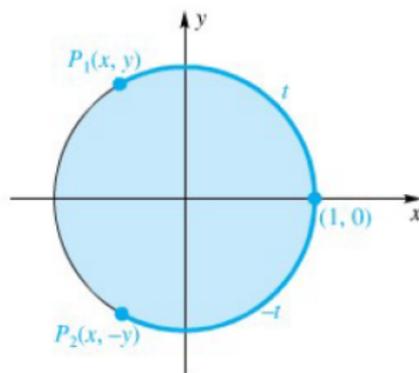
$$|\cos t| \leq 1$$

- Karena  $t$  dan  $t + 2\pi$  menentukan titik  $P(x, y)$  yang sama, maka

$$\sin(2\pi + t) = \sin t$$

$$\cos(2\pi + t) = \cos t$$

Misalkan titik-titik  $P_1$  dan  $P_2$  berturut-turut berpadanan dengan  $t$  dan  $-t$  simetri terhadap sumbu- $x$ .

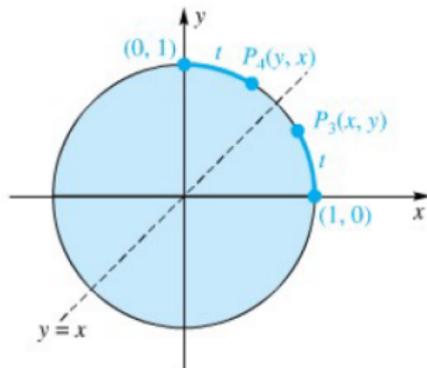


Dengan demikian koordinat  $x$ -nya akan sama, sedangkan koordinat  $y$ -nya hanya berbeda tanda, akibatnya:

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\cos(-t) = \cos t$$

Perhatikan gambar berikut:



Dapat ditunjukkan pula bahwa:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

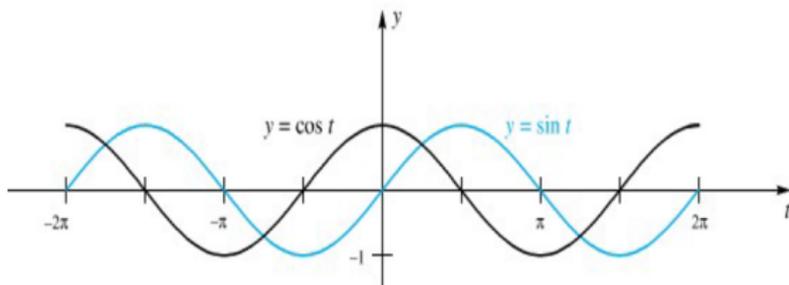
Karena titik  $(x, y)$  berada pada lingkaran satuan maka  $x$  dan  $y$  memenuhi  $x^2 + y^2 = 1$ , akibatnya muncul identitas penting yang menghubungkan fungsi-fungsi sinus dan cosinus

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

## Tabel Ringkas Nilai Fungsi Trigonometri

$t$	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
$\pi$	0	-1

## Grafik Fungsi Sinus dan Cosinus



- $\sin t$  dan  $\cos t$  keduanya berkisar antara  $-1$  dan  $1$ .
- Kedua grafik berulang pada interval yang berdampingan di sepanjang  $2\pi$ .
- Grafik  $y = \sin t$  simetri terhadap titik asal, dan grafik  $y = \cos t$  simetri terhadap sumbu- $y$ .
- Grafik  $y = \sin t$  sama seperti  $y = \cos t$  tetapi digeser  $\pi/2$  satuan ke kanan.

## Empat Fungsi Trigonometri Lainnya

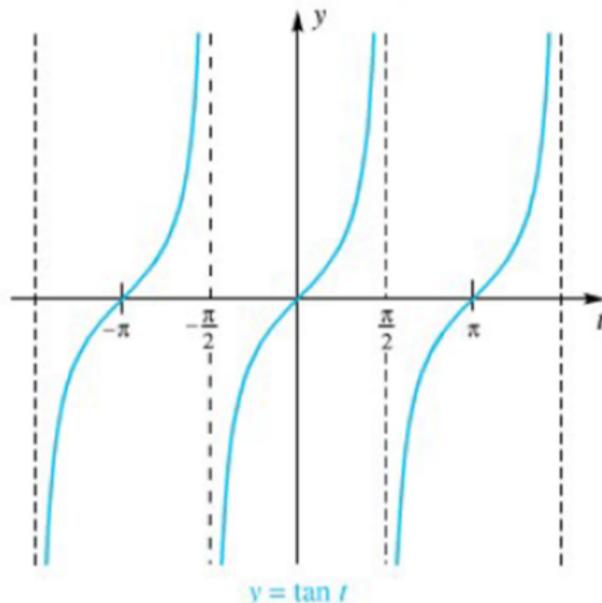
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

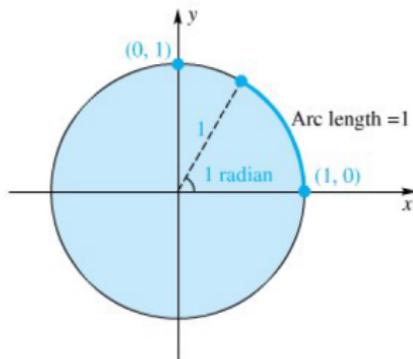
$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

# Grafik Fungsi Tangen



# Hubungan dengan Trigonometri Sudut



- Sudut biasanya diukur dalam derajat atau dalam radian.
- 1 radian didefinisikan sebagai sudut yang berkorespondensi dengan busur sepanjang 1 satuan lingkaran.
- $180^\circ = \pi$  radian  $\approx 3,1415927$  radian

Degrees	Radians
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$
150	$5\pi/6$
180	$\pi$
360	$2\pi$

# Identitas Trigonometri

- **Identitas ganjil-genap**

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

- **Identitas ko-fungsi**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

- **Identitas Pythagoras**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

- **Identitas penambahan**

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

- **Identitas sudut – ganda**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

## Pustaka

-  Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed.,  
Pearson, 2006.

## Catatan

*Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.*

## VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI