Bab 0. Pendahuluan

0.5 Fungsi dan grafiknya

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna
Hengki Tasman
Ida Fithriani
Siti Aminah
Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Definisi 1

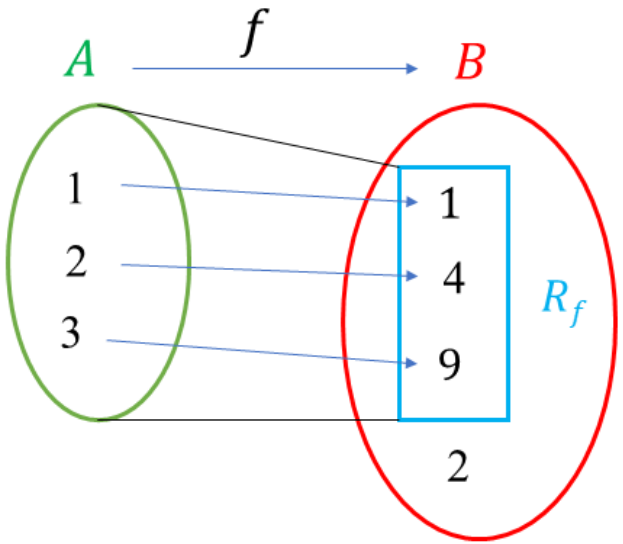
Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang mengaitkan setiap elemen x di suatu himpunan (disebut domain) ke satu nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua (disebut kodomain).
Himpunan semua nilai yang didapat disebut *range* fungsi.

Notasi:
D_f : domain fungsi f,
R_f : *range* fungsi f.

Contoh 2

Diberikan fungsi f dari himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 4, 9\}$, dengan aturan fungsinya sebagai berikut.

$1 \mapsto 1$ (1 dikaitkan ke 1),
$2 \mapsto 4$ (2 dikaitkan ke 4),
$3 \mapsto 9$ (3 dikaitkan ke 9).



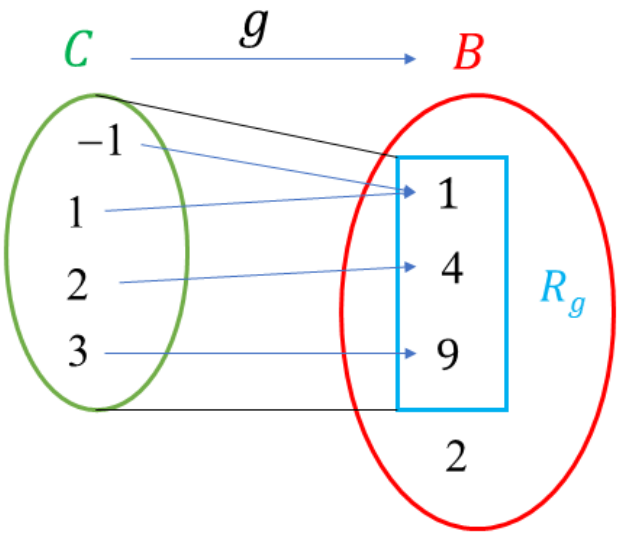
Domain fungsi f: $D_f = A = \{1, 2, 3\}$,
Range fungsi f: $R_f = \{1, 4, 9\}$,
Kodomain fungsi f adalah $B = \{1, 2, 4, 9\}$.

Perhatikan $R_f \subset B$. ■

Contoh 3

Diberikan fungsi g dari himpunan $C = \{-1, 1, 2, 3\}$ ke himpunan $B = \{1, 2, 4, 9\}$, dengan aturan fungsinya sebagai berikut.

$-1 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 4,$
$3 \mapsto 9.$



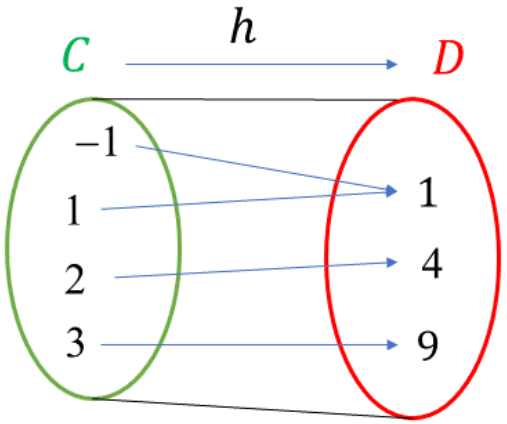
Domain fungsi g: $D_g = C = \{-1, 1, 2, 3\}$,
Range fungsi g: $R_g = \{1, 4, 9\}$,
Kodomain fungsi g adalah $B = \{1, 2, 4, 9\}$.

Perhatikan $R_g \subset B$. ■

Contoh 4

Diberikan fungsi h dari himpunan $C = \{-1, 1, 2, 3\}$ ke himpunan $D = \{1, 4, 9\}$, dengan aturan fungsinya sebagai berikut.

$-1 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 4,$
$3 \mapsto 9.$



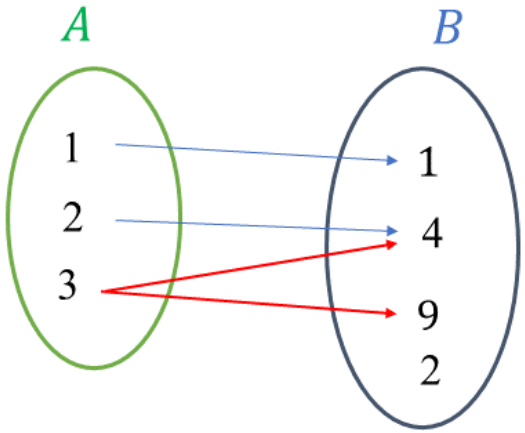
Domain fungsi h: $D_h = C = \{-1, 1, 2, 3\}$,
Range fungsi h: $R_h = \{1, 4, 9\}$,
Kodomain fungsi h adalah $D = \{1, 4, 9\}$.

Perhatikan $R_h = D$. ■

Contoh 5

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 4, 9\}$, serta aturan sebagai berikut.

$1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 9.$

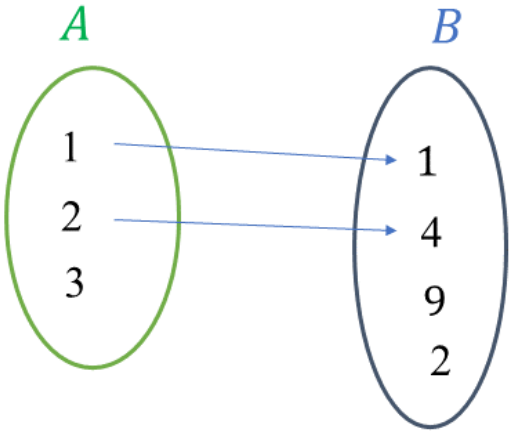


Aturan di atas bukan fungsi karena bilangan $3 \mapsto 4$ dan $3 \mapsto 9$ (3 dikaitkan ke dua bilangan yang berbeda). ■

Contoh 6

Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan himpunan $B = \{1, 2, 4, 9\}$, serta aturan sebagai berikut.

$1 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 4.$



Aturan di atas bukan fungsi karena bilangan 3 tidak dikaitkan ke suatu bilangan di B. ■

Jika aturan suatu fungsi dinyatakan dalam persamaan berbentuk $y = f(x)$, maka x disebut variabel bebas (*independent variable*) dan y disebut variabel tak-bebas (*dependent variable*).

Contoh 7

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 3$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.
Tentukanlah $f(0)$, $f(2)$, $f(a)$, $f(a+h)$, $f(2\,a+h)$, R_f.

$f(0) = 3,$
$f(2) = 2^2 + 3 = 7,$
$f(a) = a^2 + 3,$
$f(a+h) = (a+h)^2 + 3 = a^2 + 2\,a\,h + h^2 + 3,$

$R_f = [3, \infty).$ ■

Contoh 8

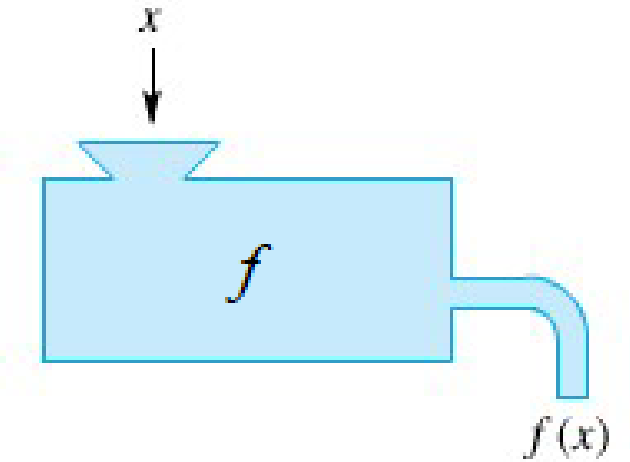
Diberikan fungsi $g : D_g \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = \sqrt{x} + 3$ untuk setiap $x \in D_g = [0, \infty)$.
Tentukanlah $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(a+h)$, R_g.

$g(-1)$ tidak terdefinisi karena $-1 \notin D_g$,
$g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(a+h) = \sqrt{a+h} + 3$,
$R_g = [3, \infty)$. ■

Catatan

Variabel x bersifat dummy (replika), sehingga bisa diganti dengan simbol lainnya.
Pada contoh di atas, aturan fungsi g dapat ditulis sebagai $g(s) = \sqrt{s} + 3$ atau $g(\alpha) = \sqrt{\alpha} + 3$ dan seterusnya.

Fungsi dapat dipandang sebagai suatu mesin.



Perhatikan ada 3 hal yang berbeda, yaitu:

1. x: masukan (*input*) untuk fungsi f
2. f: fungsi (aturan)
3. $f(x)$: keluaran (*output*) dari fungsi f, nilai fungsi f di titik x

Domain alami (*natural domain*) dari fungsi f adalah himpunan terbesar dari bilangan riil-bilangan riil yang membuat aturan f fungsi berlaku.

Contoh 9

Diberikan fungsi f, dengan $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.
Tentukanlah domain alami fungsi f tersebut!

Karena penyebut suatu pecahan tidak boleh bernilai 0, maka
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3\} = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. ■

Catatan

Untuk selanjutnya, yang dimaksud dengan domain adalah domain alami.

Contoh 10

Diberikan fungsi g dengan $g(t) = \sqrt{t+3}$.
Tentukanlah domain fungsi g tersebut!

Karena akar kuadrat berlaku untuk bilangan tak-negatif, maka
$D_g = \{t \in \mathbb{R} : t \geq -3\} = [-3, \infty)$. ■

Contoh 11

Diberikan fungsi h dengan $h(s) = -\dfrac{2}{\sqrt{s+3}}$.

Tentukanlah domain fungsi h tersebut!

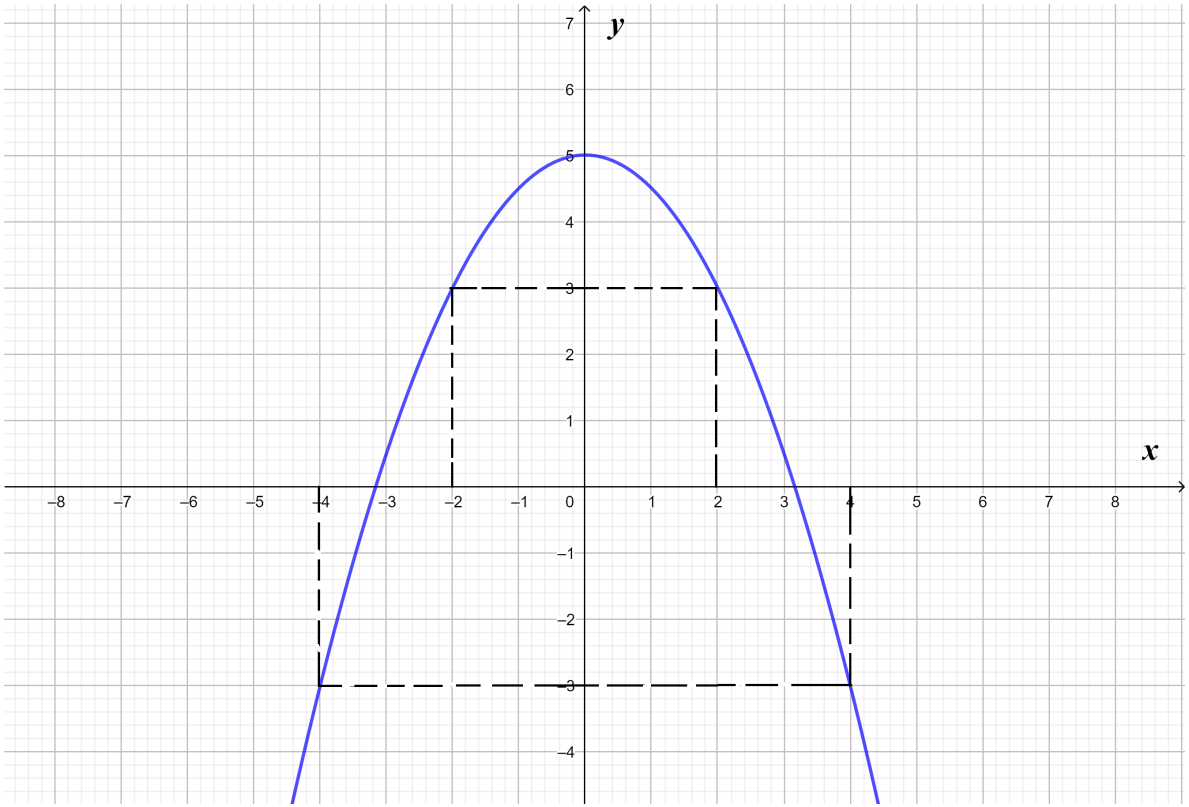
Karena akar kuadrat berlaku untuk bilangan tak-negatif dan penyebut tidak boleh bernilai 0, maka
$D_h = \{s \in \mathbb{R} : s > -3\} = (-3, \infty)$. ■

Grafik fungsi f merupakan grafik persamaan $y = f(x)$.

Akibatnya, prosedur untuk menggambar grafik fungsi f sama dengan prosedur untuk menggambar persamaan $y = f(x)$

Fungsi f dikatakan **fungsi genap** (*even function*) jika $f(x) = f(-x)$ untuk **setiap** x.

Ciri grafik fungsi genap: simetri terhadap sumbu y.



Grafik fungsi genap (kurva biru). $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (-\infty, 5]$.

Contoh 12

Fungsi f dengan $f(x) = x^2 + 3$ merupakan fungsi genap karena $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ untuk setiap x di $D_f = \mathbb{R}$. ■

Contoh 13

Fungsi g dengan $g(s) = \dfrac{s^2}{2 + s^4}$ merupakan fungsi genap karena

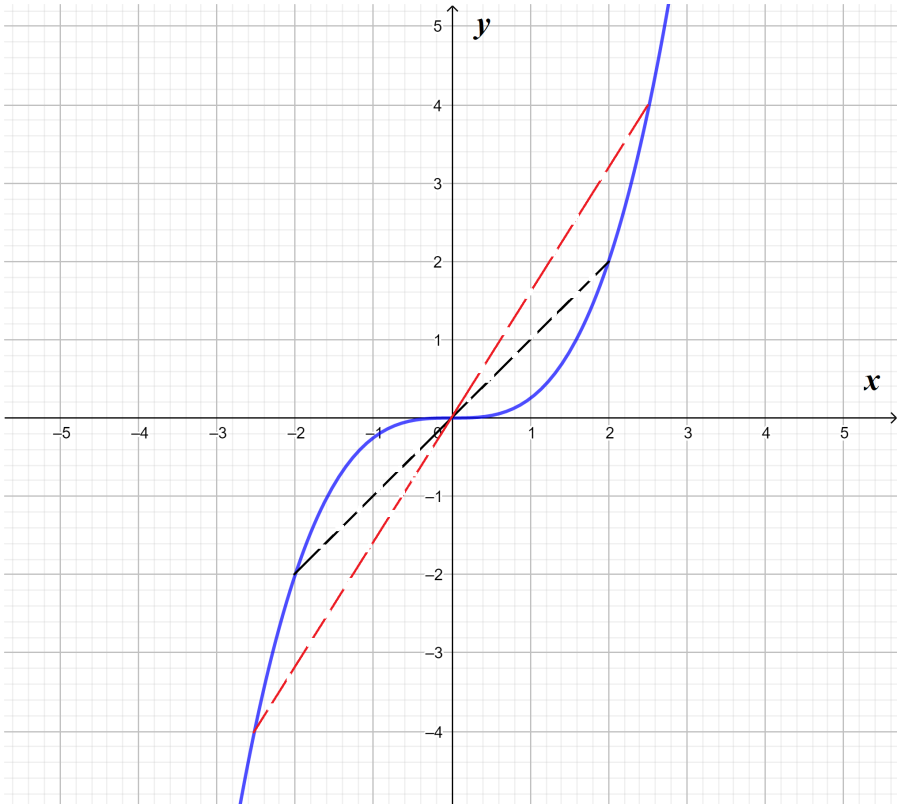
$$g(-s) = \frac{(-s)^2}{2 + (-s)^4} = \frac{s^2}{2 + s^4} = g(s)$$ untuk setiap s di $D_g = \mathbb{R}$. ■

Contoh 14

Diberikan fungsi h dengan $h(t) = t^3 + t$.
Perhatikan $h(1) = 2$, tapi $h(-1) = -2$.
Karena $h(-1) \neq h(1)$, maka fungsi h bukan merupakan fungsi genap. ■

Fungsi f dikatakan fungsi ganjil (*odd function*) jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap x.

Ciri grafik fungsi ganjil: simetri terhadap titik asal (0,0).



Grafik fungsi ganjil (kurva biru). $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$.

Contoh 15

Fungsi f dengan $f(t) = t^3 + t$ merupakan fungsi ganjil karena $f(-t) = (-t)^3 + (-t) = -t^3 - t = -(t^3 + t) = -f(t)$ untuk setiap t di D_f. ■

Contoh 16

Fungsi g dengan $g(s) = \dfrac{s^2}{2 + s^4}$ bukan merupakan fungsi ganjil karena $g(-1) = \frac{1}{3}$ dan $g(1) = \frac{1}{3}$, tapi $g(-1) \neq -g(1)$. ■

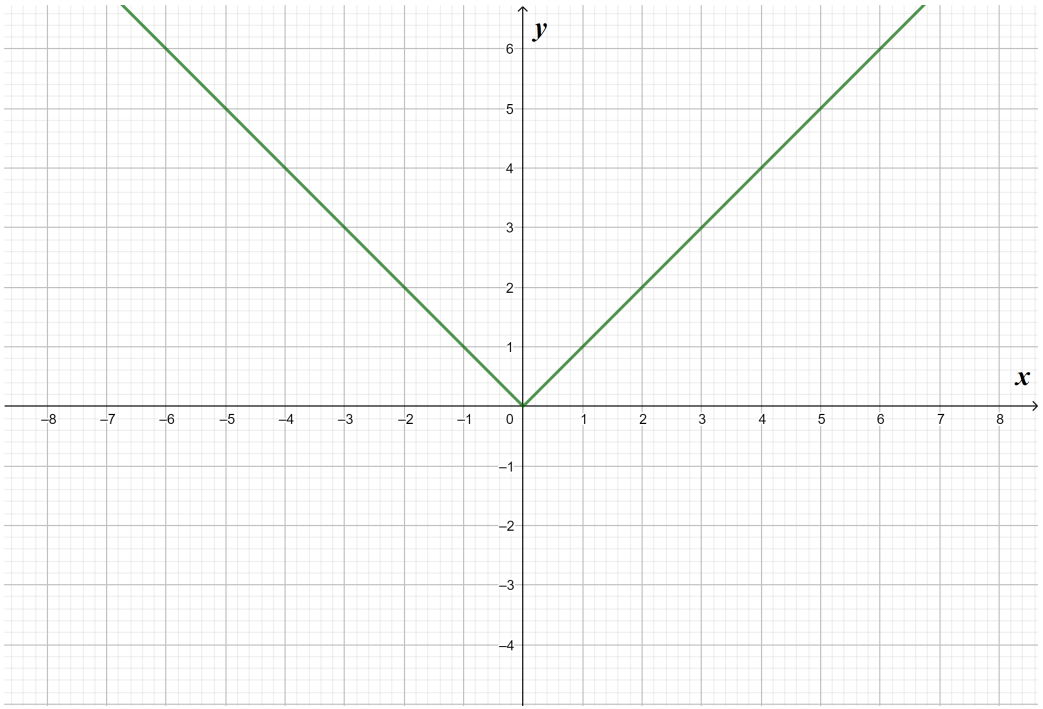
Latihan Mandiri.

Apakah fungsi berikut merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil atau bukan keduanya?

1. $h(p) = p^3 + p + 1$.
2. $j(k) = \dfrac{k^3 + 2\,k}{k^4 + 2\,k^2 + 3}$.

Fungsi nilai mutlak $|\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$



Grafik fungsi nilai mutlak $|\ |$.

Perhatikan:

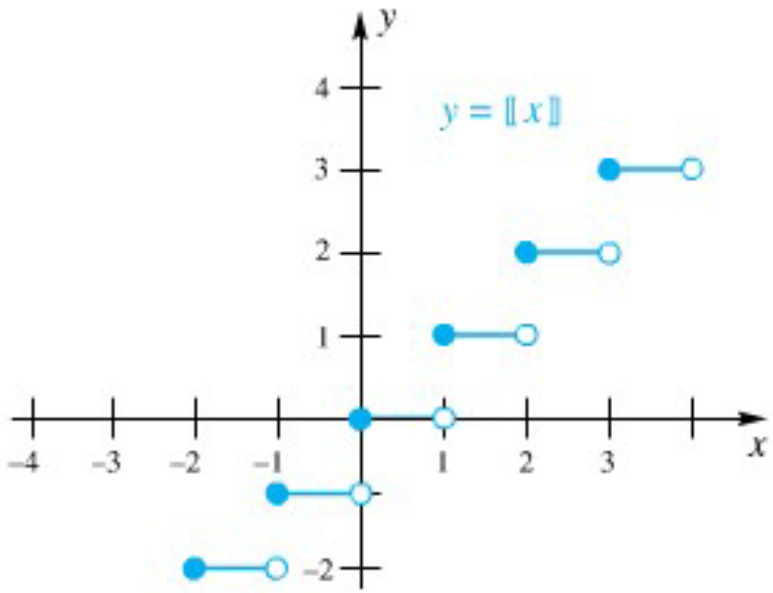
- $D_{|\ |} = \mathbb{R}$
- $R_{|\ |} = [0, \infty)$

Fungsi bilangan bulat terbesar $[\![\ ]\!] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan
$[\![x]\!]$ = bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Perhatikan:

- $[\![0]\!] = [\![0{,}7]\!] = [\![0{,}9]\!] = 0$,
- $[\![1]\!] = [\![1{,}5]\!] = [\![1{,}99]\!] = 1$,
- $[\![2]\!] = [\![2{,}01]\!] = [\![2{,}99]\!] = 2$,
- $[\![\text{-}1]\!] = [\![\text{-}0{,}77]\!] = [\![\text{-}0{,}09]\!] = \text{-}1$,
  $[\![\text{-}2]\!] = [\![\text{-}1{,}99]\!] = [\![\text{-}1{,}09]\!] = \text{-}2$.

- $D_{[\![\ ]\!]} = \mathbb{R}$.
- $R_{[\![\ ]\!]} = \mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.



Grafik fungsi bilangan bulat terbesar $[\![\ ]\!]$.

Latihan Mandiri.

Periksalah apakah fungsi berikut merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil atau bukan keduanya, lalu gambarlah grafik fungsi tersebut!

1. $y = [\![2\,x]\!]$.
2. $y = 2\,[\![x]\!]$.

Pustaka

Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI