

Bab 0. Pendahuluan

0.2 Ketaksamaan dan Nilai Mutlak

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fithriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Ketaksamaan (*inequality*) $a < x < b$

- merupakan gabungan ketaksamaan $a < x$ dan $x < b$.
- mendeskripsikan interval buka yang berisi **semua** bilangan riil antara a dan b .

Interval buka (*open interval*) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Contoh 1

Interval buka $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$.

Grafik interval buka $(-1, 6)$:



Ketaksamaan $a \leq x \leq b$

- merupakan gabungan ketaksamaan $a \leq x$ dan $x \leq b$.
- mendeskripsikan interval tutup yang berisi **semua** bilangan riil antara a dan b , serta a dan b .

Interval tutup (*closed interval*) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Contoh 2

Interval tutup $[-1, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\}$.

Grafik interval buka $[-1, 5]$:



Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Contoh 3

Diberikan ketaksamaan $-5 < 2x - 3 < 9$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya dan grafik himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$-5 < 2x - 3 < 9$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 12 \text{ (ketiga ruas ditambah 3)}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 6 \text{ (ketiga ruas dikali } 1/2 \text{)}$$

Himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$ dan grafik himpunan penyelesaiannya sebagai berikut.



Contoh 4

Diberikan ketaksamaan $x^2 - 5x < 6$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 6) < 0 \text{ (pemfaktoran)}$$

Lakukan uji tanda. Ketika $x = 0$, $x^2 - 5x - 6 < 0$.



Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$. ■

Latihan Mandiri.

- 1 Diberikan ketaksamaan $-5 < -2x - 3 < 9$.
Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!
- 2 Diberikan ketaksamaan $8 \leq x^4 - 2x^2$.
Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!
- 3 Diberikan ketaksamaan $\frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$.
Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Nilai mutlak (*absolute value*) dari bilangan riil x didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 5

$|3,14| = 3,14$ karena $3,14 \geq 0$.

$|-3,14| = -(-3,14) = 3,14$ karena $-3,14 < 0$. ■

Sifat nilai mutlak.

- 1 $|x y| = |x| |y|$
- 2 $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
- 3 $|x + y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)
- 4 $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Jika $a > 0$, maka

- 1 $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$.
- 2 $|x| > a$ jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$.

Contoh 6

Buktikanlah $|-a| = |a|$.

Perhatikan $|-a| = |(-1) \cdot a| = |-1| \cdot |a| = 1 \cdot |a| = |a|$. ■

Contoh 7

Buktikanlah $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned}|a - b| &= |a + (-b)| \\ &\leq |a| + |-b| \quad (\text{ketaksamaan segitiga}) \\ &= |a| + |b|\end{aligned}$$

Jadi $|a - b| \leq |a| + |b|$. ■

Hubungan nilai mutlak dan akar kuadrat.

$$|x|^2 = x^2 \text{ dan } |x| = \sqrt{x^2}.$$

Sifat nilai mutlak dalam ketaksamaan kuadrat:

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Catatan

- 1 **Akar kuadrat** dari bilangan riil positif adalah bilangan positif.
Sebagai contoh, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$.
- 2 Secara umum, $\sqrt{x^2} \neq x$.
Sebagai contoh, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.
Perhatikan $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

Contoh 8

Diberikan ketaksamaan $|2x - 5| < 7$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$|2x - 5| < 7$$

$$\Leftrightarrow -7 < 2x - 5 < 7 \quad (\text{sifat ketaksamaan nilai mutlak, } 7 > 0)$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 12 \quad (\text{ketiga ruas ditambah } 5)$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 6 \quad (\text{ketiga ruas dikali } \frac{1}{2})$$

Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah

$$(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}. \blacksquare$$

Contoh 9

Diberikan ketaksamaan $|x - 1| < 2|x - 3|$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$|x - 1| < 2|x - 3|$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < |2(x - 3)| \quad (\text{sifat nilai mutlak})$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < 4(x - 3)^2 \quad (\text{sifat ketaksamaan nilai mutlak})$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 22x + 35 > 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 7)(x - 5) > 0 \quad (\text{pemfaktoran})$$

Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah

$$(-\infty, 2\frac{1}{3}) \cup (5, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\frac{1}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}. \blacksquare$$

Latihan Mandiri.

- 1 Diberikan ketaksamaan $\left| \frac{4x + 3}{x + 6} \right| > 1$.
Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

- 2 Buktikanlah $\left| \frac{x - 2}{x^2 + 9} \right| \leq \frac{|x| + 2}{9}$.

Pustaka

 Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed.,
Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI