

Bab 0. Pendahuluan

0.2 Ketaksamaan dan Nilai Mutlak

Tim Dosen Kalkulus 1

Arman Haqqi Anna

Hengki Tasman

Ida Fitriani

Siti Aminah

Wed Giyarti

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Indonesia

Ketaksamaan (*inequality*) $a < x < b$

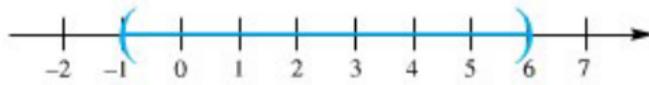
- merupakan gabungan ketaksamaan $a < x$ dan $x < b$.
- mendeskripsikan interval buka yang berisi **semua** bilangan riil antara a dan b .

Interval buka (*open interval*) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

Contoh 1

Interval buka $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$.

Grafik interval buka $(-1, 6)$:



Ketaksamaan $a \leq x \leq b$

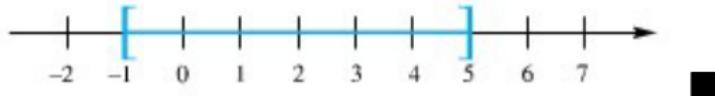
- merupakan gabungan ketaksamaan $a \leq x$ dan $x \leq b$.
- mendeskripsikan interval tutup yang berisi semua bilangan riil antara a dan b , serta a dan b .

Interval tutup (*closed interval*) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Contoh 2

Interval tutup $[-1, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 5\}$.

Grafik interval buka $[-1, 5]$:



Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

Contoh 3

Diberikan ketaksamaan $-5 < 2x - 3 < 9$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya dan grafik himpunan penyelesaiannya!

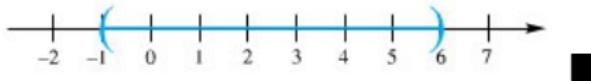
Perhatikan:

$$-5 < 2x - 3 < 9$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 12 \text{ (ketiga ruas ditambah 3)}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 6 \text{ (ketiga ruas dikali } 1/2\text{)}$$

Himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$ dan grafik himpunan penyelesaiannya sebagai berikut.



Contoh 4

Diberikan ketaksamaan $x^2 - 5x < 6$.

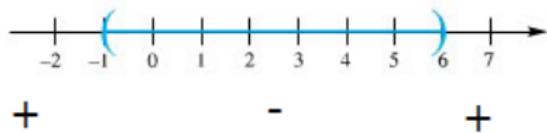
Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 6) < 0 \text{ (pemfaktoran)}$$

Lakukan uji tanda. Ketika $x = 0$, $x^2 - 5x - 6 < 0$.



Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah $(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}$. ■

Latihan Mandiri .

- ① Diberikan ketaksamaan $-5 < -2x - 3 < 9$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

- ② Diberikan ketaksamaan $8 \leq x^4 - 2x^2$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

- ③ Diberikan ketaksamaan $\frac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Nilai mutlak (*absolute value*) dari bilangan riil x didefinisikan sebagai:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh 5

$|3,14| = 3,14$ karena $3,14 \geq 0$.

$|-3,14| = -(-3,14) = 3,14$ karena $-3,14 < 0$. ■

Sifat nilai mutlak.

① $|xy| = |x||y|$

② $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

③ $|x+y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)

④ $|x-y| \geq ||x| - |y||$

Jika $a > 0$, maka

① $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$.

② $|x| > a$ jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$.

Contoh 6

Buktikanlah $| - a | = |a|$.

Perhatikan $| - a | = |(-1).a| = | - 1 | . |a| = 1 . |a| = |a|$. ■

Contoh 7

Buktikanlah $|a - b| \leq |a| + |b|$.

Perhatikan:

$$\begin{aligned}|a - b| &= |a + (-b)| \\&\leq |a| + |-b| \quad (\text{ketaksamaan segitiga}) \\&= |a| + |b|\end{aligned}$$

Jadi $|a - b| \leq |a| + |b|$. ■

Hubungan nilai mutlak dan akar kuadrat.

$$|x|^2 = x^2 \text{ dan } |x| = \sqrt{x^2}.$$

Sifat nilai mutlak dalam ketaksamaan kuadrat:

$$|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Catatan

- ① Akar kuadrat dari bilangan riil positif adalah bilangan positif.
Sebagai contoh, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$.
- ② Secara umum, $\sqrt{x^2} \neq x$.
Sebagai contoh, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.
Perhatikan $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$.

Contoh 8

Diberikan ketaksamaan $|2x - 5| < 7$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$|2x - 5| < 7$$

$$\Leftrightarrow -7 < 2x - 5 < 7 \quad (\text{sifat ketaksamaan nilai mutlak, } 7 > 0)$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 12 \quad (\text{ketiga ruas ditambah } 5)$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 6 \quad (\text{ketiga ruas dikali } \frac{1}{2})$$

Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah

$$(-1, 6) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 6\}. \blacksquare$$

Contoh 9

Diberikan ketaksamaan $|x - 1| < 2|x - 3|$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

Perhatikan:

$$|x - 1| < 2|x - 3|$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < |2(x - 3)| \quad (\text{sifat nilai mutlak})$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 < 4(x - 3)^2 \quad (\text{sifat ketaksamaan nilai mutlak})$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 22x + 35 > 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 7)(x - 5) > 0 \quad (\text{pemfaktoran})$$

Jadi himpunan penyelesaian dari ketaksamaan tersebut adalah $(-\infty, 2\frac{1}{3}) \cup (5, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\frac{1}{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$. ■

Latihan Mandiri .

- ① Diberikan ketaksamaan $\left| \frac{4x+3}{x+6} \right| > 1$.

Tentukanlah himpunan penyelesaiannya!

- ② Buktikanlah $\left| \frac{x-2}{x^2+9} \right| \leq \frac{|x|+2}{9}$.

Pustaka

- 
- Varberg, D., Purcell, E., Rigdon, S., Calculus, 9th ed., Pearson, 2006.

Catatan

Beberapa gambar dalam materi ini diambil dari pustaka di atas.

VIDEO BANTUAN DANA MATA KULIAH MOOCs DPASDP UI 2020

Copyright © Universitas Indonesia 2020

Produksi Prodi S1 Matematika, Departemen Matematika, FMIPA UI